Alcir Monticelli

FLUXO DE CARGA EM REDES DE ENERGIA ELÉTRICA

ALCIR JOSÉ MONTICELLI
Professor do Departamento de Engenharia Elétrica da UNICAMP.
Engenheiro de Eletrônica, ITA
Doutor em Engenharia Elétrica, UNICAMP

FLUXO DE CARGA EM REDES DE ENERGIA ELÉTRICA

Cepel
Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
Eletrobrás Centrais Elétricas Brasileiras SA

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.

A publicação deste livro se tornou possível graças ao apoio do Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL).

CIP-Brasil. Catalogação-na-Publicação
Câmara Brasileira do Livro, SP

Monticelli, Alcir José, 1946-
M793f Fluxo de carga em redes de energia elétrica / Alcir J. Monticelli. -- São Paulo : Edgard Blücher, 1983.

Bibliografia.

1. Energia elétrica - Sistemas 2. Kirchhoff - Leis 3. Redes elétricas I. Título.

83-0205 CDD-621.31920212

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculos : Fluxo de carga : Redes elétricas : Engenharia 621.31920212
2. Fluxo de carga : Redes elétricas : Leis de Kirchhoff : Engenharia 621.31920212
3. Leis de Kirchhoff : Fluxo de carga : Redes elétricas : Engenharia 621.31920212

© 1983 *Editora Edgard Blücher Ltda.*

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer meios sem autorização escrita da editora

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.
01000 CAIXA POSTAL 5450
END. TELEGRÁFICO: BLÜCHERLIVRO
SÃO PAULO — SP — BRASIL

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

Nota Introdutória

O Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) foi criado em 1974, pela Eletrobrás e suas subsidiárias regionais, com o objetivo de contribuir para o desenvolvimento tecnológico nacional na área de energia elétrica. Para tanto, o CEPEL dispõe de dois laboratórios onde trabalham, atualmente, cerca de 500 pessoas: o Laboratório de Sistemas Elétricos (LSE), onde são realizados pesquisas e projetos tecnológicos nas áreas de sistemas de potência, materiais para equipamentos elétricos e eletrônica aplicada; e o Laboratório de Equipamentos Elétricos (LEE), dedicado a estudos, projetos e ensaios em alta potência e alta tensão nas áreas de linhas, substações e equipamentos elétricos.

No âmbito do LSE, o CEPEL vem há alguns anos desenvolvendo intensa atividade de pesquisa na área de planejamento da expansão de redes de transmissão. Este projeto conta com o apoio técnico e financeiro do Departamento de Sistemas de Transmissão (DEST) da ELETROBRÁS e é realizado em conjunto com o Departamento de Engenharia Elétrica (DEE) da UNICAMP. Dentre os resultados alcançados, pode-se mencionar o desenvolvimento de um sistema interativo de planejamento de redes de transmissão, de métodos para síntese automática de redes e reforços para contingência e de modelos para cálculo de confiabilidade de sistemas de geração/transmissão.

O presente livro tem como origem os relatórios de pesquisa da UNICAMP sobre análise de redes. Seu autor, Prof. Alcir Monticelli, é um pesquisador de renome internacional, cuja contribuição técnica tem sido extremamente valiosa não só para o CEPEL como para várias empresas do setor elétrico. O CEPEL, ao co-editar o texto, visa divulgar técnicas que representam o "estado da arte" nesta área e que tem amplas possibilidades de aplicação no planejamento não só da expansão, como também da operação e controle em tempo real de sistemas elétricos de potência.

Além de servir como referência abrangente, atualizada e confiável aos técnicos do setor, sua forma didática permite sua utilização em cursos de engenharia elétrica, tanto a nível de graduação como pós graduação.

JERZY LEPECKI
Diretor Executivo
CEPEL

Agradecimentos

Este livro é, em parte, uma extensão natural do trabalho desenvolvido nos últimos sete anos no Departamento de Engenharia Elétrica da UNICAMP, tanto no ensino como em projetos de pesquisa e desenvolvimento, que contaram com o apoio do Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL), das Centrais Elétricas Brasileiras (ELETROBRÁS) e, mais recentemente, da Companhia Energética de São Paulo (CESP). Durante todos esses anos, foi para mim muito gratificante ter podido trabalhar com Ariovaldo Verândio Garcia, Sigmar Maurer Deckmann, Fernando Urbano, Fujio Sato, Carlos A. F. Murari, Antonio Chaves Pizzolante, André L. M. França, Vivaldo Fernando da Costa, Anésio dos Santos Jr., Orlando Luíz Semensato e Manuel Moreira Baptista, como orientador de seus trabalhos de tese de mestrado e/ou doutorado. Uma dívida adicional eu tenho com Orlando, Ariovaldo e Carlos, pela ajuda na revisão dos originais e pelas sugestões na organização final do livro. Entre outros, agradeço a Brian Stott, Ongun Alsaç, Mário V.F. Pereira, Sérgio H. Cunha, Gerson Couto e Frederico M. Gomes, pela convivência no desenvolvimento de trabalhos em comum. Estendo meus agradecimentos a Edson Pedro de Lima e Luiz Cláudio Pasqüini que, com muita paciência, fizeram os desenhos que compõem este livro. Meu reconhecimento ao Dr. Jerzy Lepecki, não só pelo apoio do CEPEL mas, também pelo incentivo para que eu preparasse este trabalho.

Alcir José Monticelli

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1 1

Fluxo de carga - Aspectos gerais 1

1.1. Formulação básica do problema 2
1.2. Modelagem de linhas e transformadores 4
1.2.1. Linhas de transmissão 4
1.2.2. Transformadores em-fase 5
1.2.3. Transformadores defasadores 8
1.3. Fluxos de potência ativa e reativa 10
1.3.1. Linhas de transmissão 10
1.3.2. Transformadores em-fase 11
1.3.3. Transformadores defasadores 11
1.3.4. Expressões gerais dos fluxos 12
1.4. Formulação matricial 12
1.5. Impedância equivalente entre dois nós 14

CAPÍTULO 2 17

Fluxo de carga linearizado 17

2.1. Linearização 18
2.2. Formulação matricial ($\underline{P} = \underline{B}' \theta$) 20
2.3. Modelo *CC* 23
2.4. Representação das perdas no Modelo *CC* 25

CAPÍTULO 3 29

Eliminação de Gauss 29
3.1. Matrizes tipo admitância nodal 30
3.2. Método da eliminação de Gauss 31
3.3. Matrizes elementares 34
3.4. Decomposição *LDU* 38
3.5. Resolução do sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ pelos fatores triangulares 42
3.6. Eliminação de Gauss e redução de circuitos 45
3.7. Critérios de ordenação 49

CAPÍTULO 4 53

Análise de alterações em redes de transmissão 53
4.1. Alterações na matriz admitância nodal 53
4.1.1. Alterações simples 53
4.1.2. Alterações múltiplas 56
4.2. Análise de sensibilidade 58
4.2.1. Alterações simples 59
4.2.2. Alterações múltiplas 63
4.3. Alterações na matriz impedância nodal 64
4.3.1. Alterações simples 64
4.3.2. Alterações múltiplas 66
4.4. Teorema da Compensação 66
4.5. Lema de inversão de matrizes 71

CAPÍTULO 5 75

Fluxo de carga não-linear: algoritmos básicos 75
5.1. Formulação do problema básico 75
5.2. Resolução de sistemas algébricos pelo método de Newton 78
5.3. Fluxo de carga pelo método de Newton 82
5.4. Métodos desacoplados 93
5.4.1. Método de Newton desacoplado 94
5.4.2. Método desacoplado rápido 100

CAPÍTULO 6 111

Fluxo de carga: controles e limites 111
6.1. Modos de representação 112
6.2. Ajustes alternados 113
6.3. Controle de tensão em barras PV 114
6.4. Limites de tensão em barras PQ 115
6.5. Transformadores em-fase com controle automático de *tap* 116
6.6. Transformadores defasadores com controle automático de fase 118
6.7. Controle de intercâmbio entre áreas 120
6.8. Controle de tensão em barras remotas 122
6.9. Cargas variáveis com a tensão 123

CAPÍTULO 7 127

Equivalentes externos 127
7.1. Reações externas 128
7.2. Equivalente Ward: modelo linear 129
7.3. Obtenção de equivalentes por eliminação de Gauss 132
7.4. Equivalente Ward: modelo não-linear 136
7.5. Equivalente Ward com retenção de barras PV 141
7.6. Equivalente Ward estendido 143
7.7. Modelo de fluxo de carga não-reduzido 147

APÊNDICE A 149

Análise de redes em centros de supervisão e controle em tempo real 149
A.1. Introdução aos centros de controle 149
A.1.1. Controle da geração 150
A.1.2. Controle supervisório e de segurança 150
A.2. Operação em tempo real 151
A.2.1. Restrições de carga, de operação e de segurança 151
A.2.2. Estados de operação do sistema 152
A.2.3. Transições entre os estados do sistema 154
A.3. Sistema de análise de redes 157
A.3.1. Configurador 157
A.3.2. Estimador de estado 158
A.3.3. Previsão de carga por barra 158
A.3.4. Modelagem da rede em tempo real (fluxo de carga) 159
A.3.5. Análise de segurança 159
A.3.6. Fluxo de carga de operação 160
A.3.7. Análise de sensibilidade de tensão 160
A.3.8. Controle corretivo de emergência 160

APÊNDICE B 161

Análise de sensibilidade 161

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 163

Capítulo 1

FLUXO DE CARGA ASPECTOS GERAIS

O **cálculo de fluxo de carga** (ou **fluxo de potência**) em uma rede de energia elétrica consiste essencialmente na determinação do estado da rede, da distribuição dos fluxos e de algumas outras grandezas de interesse. Nesse tipo de problema, a modelagem do sistema é estática, significando que a rede é representada por um conjunto de equações e inequações algébricas. Esse tipo de representação é utilizada em situações nas quais as variações com o tempo são suficientemente lentas para que se possa ignorar os efeitos transitórios. É claro que os transitórios do sistema só podem ser devidamente levados em conta se for utilizada uma modelagem dinâmica envolvendo equações diferenciais, além de equações algébricas. O cálculo de fluxo de carga é, em geral, realizado utilizando-se métodos computacionais desenvolvidos especificamente para a resolução do sistema de equações e inequações algébricas que constituem o modelo estático da rede.

Os componentes de um sistema de energia elétrica podem ser classificados em dois grupos: os que estão ligados entre um nó qualquer e o nó-terra, como é o caso de geradores, cargas, reatores e capacitores; e os que estão ligados entre dois nós quaisquer da rede, como é o caso de linhas de transmissão, transformadores e defasadores. Os geradores e cargas são considerados como a parte externa do sistema, e são modelados através de injeções de potência nos nós da rede. A parte interna do sistema é constituída pelos demais componentes, ou seja, linhas de transmissão, transformadores, reatores, etc. As equações básicas do fluxo de carga são obtidas impondo-se a conservação das potências ativa e reativa em cada nó da rede, isto é, a potência líquida injetada deve ser igual à soma das potências que fluem pelos componentes internos que têm este nó como um de seus terminais. Isso equivale a se impor a Primeira Lei de Kirchhoff. A Segunda Lei de Kirchhoff é utilizada para expressar os fluxos de potência nos componentes internos como funções das tensões (estados) de seus nós terminais.

1.1. *Formulação básica do problema*

Conforme foi dito anteriormente, o problema do fluxo de carga pode ser formulado por um sistema de equações e inequações algébricas não-lineares que correspondem, respectivamente, às leis de Kirchhoff e a um conjunto de restrições operacionais da rede elétrica e de seus componentes. Na formulação mais simples do problema **(formulação básica)**, a cada barra da rede são associadas quatro variáveis, sendo que duas delas entram no problema como dados e duas como incógnitas:

V_k – magnitude da tensão nodal (barra k)
θ_k – ângulo da tensão nodal
P_k – geração líquida (geração menos carga) de potência ativa
Q_k – injeção líquida de potência reativa

Dependendo de quais variáveis nodais entram como dados e quais são consideradas como incógnitas, definem-se três tipos de barras:

PQ – são dados P_k e Q_k, e calculados V_k e θ_k
PV – são dados P_k e V_k, e calculados Q_k e θ_k
REFERÊNCIA – são dados V_k e θ_k, e calculados P_k e Q_k

As barras dos tipos *PQ* e *PV* são utilizadas para representar, respectivamente, barras de carga e barras de geração (incluindo-se os condensadores síncronos). A barra $V\theta$, ou barra de referência, tem uma dupla função: como o próprio nome indica, fornece a referência angular do sistema (a referência de magnitude de tensão é o próprio nó terra); além disso, é utilizada para fechar o balanço de potência do sistema, levando em conta as perdas de transmissão não conhecidas antes de se ter a solução final do problema (daí a necessidade de se dispor de uma barra do sistema na qual não é especificada a potência ativa).

Esses três tipos de barras que aparecem na formulação básica são os mais freqüentes e também os mais importantes. Entretanto, existem algumas situações particulares, como, por exemplo, o controle de intercâmbio de uma área e o controle da magnitude da tensão de uma barra remota, nas quais aparecem outros tipos de barras (*PQV*, *P* e *V*). Esses tipos de barras não são considerados na formulação básica, mas serão incluídos no processo de resolução quando for estudada com mais detalhes a atuação dos dispositivos de controle existentes no sistema (Cap. 6). Uma outra situação, não representada na formulação básica, refere-se à modelagem das cargas: foi visto que as barras de carga são modeladas como sendo do tipo *PQ*, em que P_k e Q_k são considerados constantes; a representação de barras de carga, nas quais as potências ativa e reativa variam em função da magnitude da tensão nodal, será considerada no Cap. 6.

O conjunto de equações do problema do fluxo de carga é formado por duas equações para cada barra, cada uma delas representando o fato de as potências ativas e reativas injetadas em uma barra serem iguais à soma dos fluxos correspondentes que deixam a barra através de linhas de transmissão, transformadores, etc. Isso corresponde à imposição da Primeira Lei de Kirchhoff e pode ser expresso matematicamente como se segue:

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V_k) = \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m) \tag{1.1}$$

em que

$k = 1, \ldots$ NB, sendo NB o número de barras da rede
Ω_k – conjunto das barras vizinhas da barra k
V_k, V_m – magnitudes das tensões das barras terminais do ramo $k-m$
θ_k, θ_m – ângulos das tensões das barras terminais do ramo $k-m$
P_{km} – fluxo de potência ativa no ramo $k-m$
Q_{km} – fluxo de potência reativa no ramo $k-m$
Q_k^{sh} – componente da injeção de potência reativa devida ao elemento *shunt* da barra k ($Q_k^{sh} = b_k^{sh} V_k^2$, sendo b_k^{sh} a susceptância *shunt* ligada à barra k).

Como será mostrado mais adiante, nessas equações os ângulos θ_k e θ_m aparecem sempre na forma $\theta_k - \theta_m$, significando que uma mesma distribuição de fluxos na rede pode ser obtida se for somada uma constante arbitrária a todos os ângulos nodais, ou seja, o problema do fluxo de carga é indeterminado nas variáveis θ, o que torna necessária a adoção de uma referência angular (isso pode ser feito por uma barra tipo $V\theta$, conforme foi mencionado anteriormente). As expressões (1.1) foram montadas considerando-se a seguinte convenção de sinais: as injeções líquidas de potência são positivas quando entram na barra (geração) e negativas quando saem da barra (carga); os fluxos de potência são positivos quando saem da barra e negativos quando entram; para os elementos *shunt* das barras é adotada a mesma convenção que para as injeções. Essas convenções de sentidos para as potências ativas e reativas são as mesmas utilizadas para correntes e estão indicadas na Fig. 1.1.

O conjunto de inequações, que fazem parte do problema do fluxo de carga, é formado, entre outras, pelas restrições nas magnitudes das tensões nodais das barras *PQ* e pelos limites nas injeções de potência reativa das barras *PV*:

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max}$$
$$Q_k^{min} \leq Q_k \leq Q_k^{max} \tag{1.2}$$

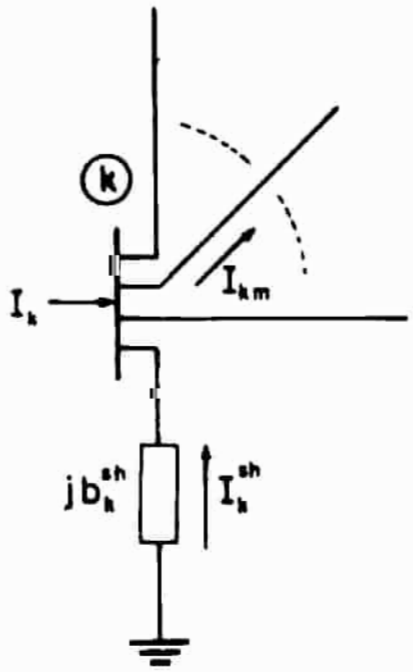


Figura 1.1 – Convenção de sinais para fluxos e injeções de corrente, potência ativa e potência reativa

Além dessas restrições, que aparecem na formulação básica, outras do mesmo tipo serão consideradas no Cap. 6, no qual serão incluídos no problema os limites nos valores dos *taps* dos transformadores em-fase e defasadores, os limites na capacidade de geração de barras responsáveis pelo controle de intercâmbio, os limites nas magnitudes das tensões das barras *PV*, etc.

1.2. *Modelagem de linhas e transformadores*

Nesta seção, são apresentados os modelos de linhas de transmissão, transformadores em-fase e defasadores. Os princípios básicos de funcionamento dos transformadores em-fase e defasadores também são discutidos.

1.2.1. *Linhas de transmissão* [1]

O modelo equivalente π de uma linha de transmissão, representado na Fig. 1-2, é definido por três parâmetros: a resistência série r_{km}; a reatância série x_{km}; e a susceptância *shunt* b_{km}^{sh}. A impedância do elemento série é

$$z_{km} = r_{km} + jx_{km} \tag{1.3}$$

enquanto a admitância série é

$$y_{km} = g_{km} + jb_{km} = z_{km}^{-1} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} - j\frac{x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}, \tag{1.4}$$

ou seja, a condutância série g_{km} e a susceptância série b_{km} são dadas, respectivamente, por

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}\ ;\ b_{km} = \frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \tag{1.5}$$

Quando o modelo π representa uma linha de transmissão têm-se r_{km} e x_{km} positivos, o que implica g_{km} positivo e b_{km} negativo (tipo indutivo). Já o elemento b_{km}^{sh} é positivo, pois o shunt é do tipo capacitivo.

A corrente I_{km} (Fig. 1.2) é formada de uma componente série e uma componente *shunt*, e pode ser calculada a partir das tensões terminais E_k e E_m, e dos parâmetros do modelo equivalente π:

$$I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + jb_{km}^{sh} E_k \tag{1.6}$$

em que

$$E_k = V_k e^{j\theta_k}\ ;\ E_m = V_m e^{j\theta_m} \tag{1.7}$$

Analogamente, a corrente I_{mk} é dada por

$$I_{mk} = y_{km}(E_m - E_k) + jb_{km}^{sh} E_m \tag{1.8}$$

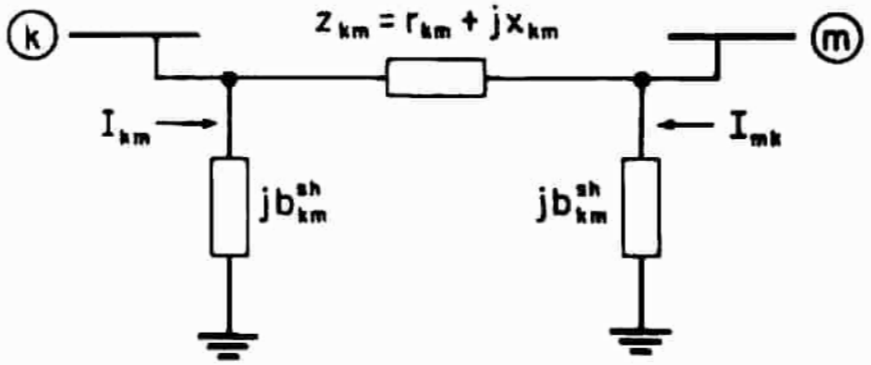


Figura 1.2 Modelo equivalente π de uma linha de transmissão

1.2.2. *Transformadores em-fase*

A representação geral de transformadores (em-fase e defasadores) dada na Fig. 1.3 consiste basicamente em uma admitância série y_{km} e um auto-transformador ideal com relação de transformação $1:t$. Para o transformador em-fase t é um número real ($t = a$) e, para o defasador, t é um número complexo ($t = ae^{j\varphi}$).

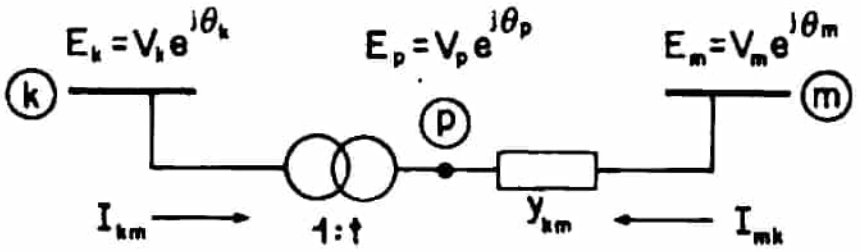


Figura 1.3 — Modelo de transformadores: em-fase, $t = a$: defasador puro, $t = e^{j\phi}$: e defasador, $t = a\,e^{j\phi}$.

A Fig. 1.4 mostra o modelo do transformador em-fase, indicando a tensão do nó intermediário p. Para este tipo de transformador, a relação entre as magnitudes das tensões dos nós terminais k e p do transformador ideal é dada por

$$\frac{V_p}{V_k} = a \tag{1.9}$$

que é a própria relação entre as tensões complexas E_p e E_k, pois $\theta_k = \theta_p$:

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{V_p e^{j\theta_p}}{V_k e^{j\theta_k}} = a \tag{1.10}$$

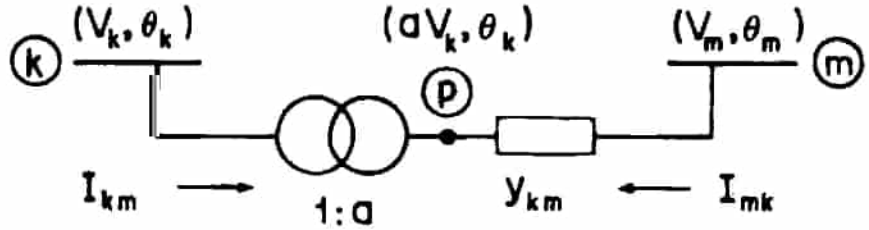


Figura 1.4 – Transformador em-fase.

O fato de o transformador $k - p$, que aparece no modelo, ser ideal implica também que as potências complexas na entrada e na saída são iguais, ou seja, não há dissipação de potência ativa ou reativa entre os nós k e p:

$$E_k I_{km}^* + E_p I_{mk}^* = 0 \tag{1.11}$$

A partir das relações (1.10) e (1.11), obtém-se:

$$\frac{I_{km}}{I_{mk}} = -\frac{|I_{km}|}{|I_{mk}|} = -a, \tag{1.12}$$

ou seja, as correntes I_{km} e I_{mk} estão defasadas de 180° e suas magnitudes estão na razão a:1.

O transformador em-fase pode ser representado por um circuito equivalente do tipo π, conforme está ilustrado na Fig. 1.5. A determinação

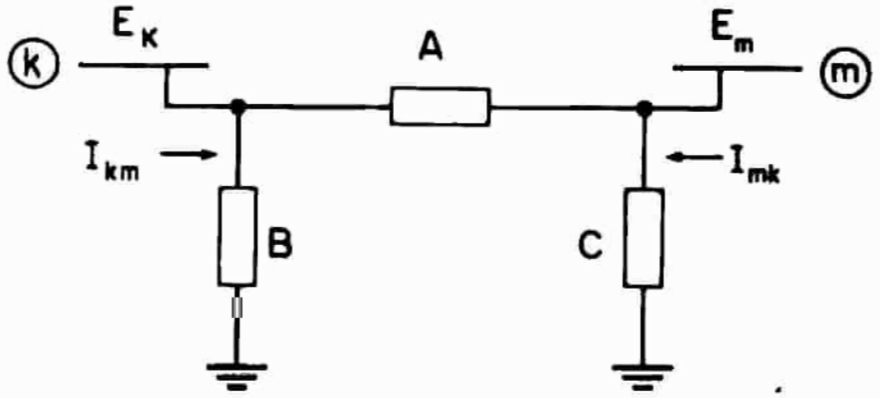


Figura 1.5 — Circuito equivalente π transformadores em-fase: $A = ay_{km}$; $B = a(a-1)y_{km}$; e $C = (1-a)y_{km}$

das admitâncias A, B e C do circuito equivalente é feita identificando-se as correntes I_{km} e I_{mk} do modelo da Fig. 1.4 com as correntes correspondentes do circuito equivalente da Fig. 1.5. Na Fig. 1.4, tem-se:

$$\begin{aligned} I_{km} &= -ay_{km}(E_m - E_p) = (a^2 y_{km})E_k + (-ay_{km})E_m \\ I_{mk} &= y_{km}(E_m - E_p) = (-ay_{km})E_k + (y_{km})E_m \end{aligned} \tag{1.13}$$

Para o modelo π da Fig. 1.5, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} I_{km} &= (A + B)E_k + (-A)E_m \\ I_{mk} &= (-A)E_k + (A + C)E_m \end{aligned} \tag{1.14}$$

Identificando-se os coeficientes de E_k e E_m nas expressões (1.13) e (1.14), obtêm-se:

$$\begin{aligned} A &= ay_{km} \\ B &= a(a-1)y_{km} \\ C &= (1-a)y_{km} \end{aligned} \tag{1.15}$$

As expressões (1.15) permitem a análise do efeito da relação de transformação $1:a$ sobre as magnitudes das tensões terminais V_k e V_m. Considere-se inicialmente $a = 1$. Neste caso, as admitâncias B e C são nulas, e o circuito equivalente π reduz-se à admitância série y_{km}. Alterando-se a relação de transformação para um valor $a < 1$, B terá sinal contrário a y_{km} e, portanto, será do tipo capacitivo, enquanto C será do tipo indutivo: isto implicará uma tendência a aumentar V_k e reduzir V_m. Ao contrário, fazendo-se $a > 1$, B será indutivo (mesmo sinal que y_{km}) enquanto C será do tipo capacitivo: haverá uma tendência a diminuir V_k e aumentar V_m. Se uma das barras terminais tiver tensão regulada (PV, VI), etc.), ou estiver eletricamente próxima de uma barra desse tipo, a outra barra terminal sofrerá os efeitos das alterações na relação $1:a$. Nestes casos, ou seja, quando uma das tensões terminais é rígida, tudo se passa como se o transformador se apoiasse em um de seus terminais para elevar ou diminuir a magnitude da tensão do terminal oposto.

1.2.3. *Transformadores defasadores*

Este tipo de transformador permite que se controle o fluxo de potência ativa do ramo no qual ele está inserido. A situação é análoga a de um circuito (rede) em corrente contínua no qual se insere uma fonte de tensão em um de seus ramos. Dependendo da polaridade da fonte, a corrente que passa no ramo poderá aumentar ou diminuir devido à introdução da fonte, eventualmente mudando de sinal. Em uma rede de transmissão em corrente alternada, o defasador, como o próprio nome indica, consegue afetar o fluxo de potência ativa introduzindo uma defasagem entre os nós k e p (*ver o modelo de defasador puro na Fig.* 1.6).

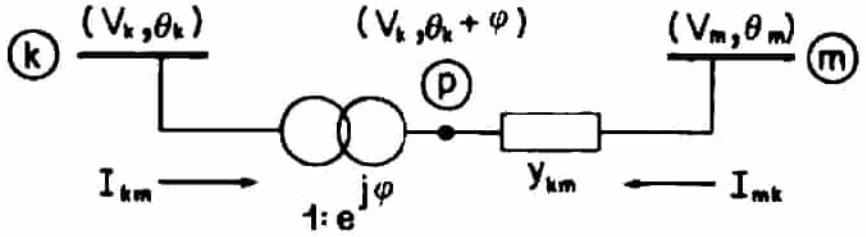


Figura 1.6 – Defasador puro ($t = e^{j\varphi}$)

Considere-se, por exemplo, uma situação na qual, antes de se introduzir o defasador, o fluxo de potência ativa tem o sentido $k \rightarrow m$ ($\theta_k^o > \theta_m^o$). Seja $\varphi > 0$ o ângulo introduzido pelo defasador, isto é, $\theta_p = \theta_k + \varphi$. Se o ramo $k - m$ for radial, o fluxo P_{km} ficará inalterado, passando a nova abertura angular do ramo $k - m$ a ser dada por $\theta_{km} = \theta_{km}^o + \varphi$, ou seja, a abertura angular sobre a admitância y_{km} ficará inalterada ($\theta_{pm} = \theta_{pm}^o$), pois os nós p e m sofrerão a mesma variação angular ($\theta_p = \theta_p^o + \varphi$ e $\theta_m = \theta_m^o + \varphi$). Se o ramo $k - m$ não for radial, situação que realmente tem interesse prático, o restante do sistema tenderá a impedir que a abertura angular θ_{km} varie livremente, e a variação provocada pela introdução do desafador será tanto menor quanto mais "forte" for o sistema de transmissão (ou quanto maior for a magnitude da susceptância equivalente total entre os nós k e m, em relação à susceptância do defasador). Neste caso, a abertura angular sobre a admitância y_{km} passará a ser $\theta_{pm} > \theta_{pm}^o$, o que implicará um acréscimo no fluxo de potência ativa no ramo $k - m$. O mesmo raciocinio pode ser repetido para φ negativo, caso em que o fluxo de potência ativa no ramo $k - m$ diminuirá com a introdução do defasador. Uma situação extrema ocorre para sistemas infinitamente "fortes", para os quais os ângulos θ_k e θ_m são rígidos, isto é, não variam com o ângulo φ introduzido pelo defasador (obviamente, esta é uma situação ideal). Neste caso, tem-se $\theta_{km} = \theta_{pm} - \varphi = \theta_{km}^o = \theta_{pm}^o$, ou seja, a abertura angular sobre a admitância y_{km}, após a introdução do defasador, é $\theta_{pm} = \theta_{pm}^o + \varphi$. Isso significa que todo o ângulo φ do defasador é somado à abertura angular existente inicialmente entre os pontos p e m (se φ for positivo, o fluxo de potência ativa aumentará, e vice-

versa). Existem, portanto, duas situações extremas: o ramo $k-m$ é radial, caso em que $\theta_{pm} = \theta^{\circ}_{pm}$, significando que o fluxo P_{km} independe de φ: o ramo $k-m$ não é radial e a rede é infinitamente forte entre os nós k e m, caso em que $\theta_{pm} = \theta^{\circ}_{pm} + \varphi$, significando máxima influência de φ sobre P_{km}. As situações práticas estão entre os dois extremos, ou seja, para $\varphi > 0$, tem-se $\theta^{\circ}_{pm} < \theta_{pm} < \theta^{\circ}_{pm} + \varphi$ (relação análoga vale para $\varphi < 0$). Note-se que toda a discussão precedente vale para sistemas de transmissão típicos, nos quais os fluxos de potência ativa dependem basicamente das aberturas angulares nos ramos (as reatâncias série são muito maiores que as resistências série).

No caso do defasador puro (aquele que só afeta a relação entre as fases das tensões E_k e E_p, sem afetar a relação entre suas magnitudes), tem-se:

$$\frac{E_p}{E_k} = t = e^{j\varphi} \tag{1.16}$$

o que equivale a dizer

$$\theta_p = \theta_k + \varphi, \tag{1.17}$$

pois as magnitudes das tensões V_k e V_m são iguais. Substituindo-se (1.16) em (1.11), obtém-se:

$$\frac{I_{km}}{I_{mk}} = -t^* = -e^{-j\varphi} \tag{1.18}$$

As correntes I_{km} e I_{mk} podem ser escritas em função das tensões terminais, da mesma forma que foi feito para o transformador em-fase, resultando

$$\begin{aligned} I_{km} &= -t^* y_{km}(E_m - E_p) = (y_{km})E_k + (-t^* y_{km})E_m \\ I_{mk} &= y_{km}(E_m - E_p) = (-t y_{km})E_k + (y_{km})E_m \end{aligned} \tag{1.19}$$

Pode-se observar facilmente que é impossível a determinação dos parâmetros A, B e C do circuito equivalente π neste caso, pois nas expressões (1.19) o coeficiente de E_m na equação de I_{km} difere do coeficiente de E_k na equação de I_{km} ($-t^* y_{km}$ e $-t y_{km}$, respectivamente).

Já foram discutidos o transformador em-fase ($t = a$) e o defasador puro ($t = e^{j\varphi}$). O defasador com $t = ae^{j\varphi}$ afeta não só o fluxo de potência ativa mas também o fluxo de potência reativa (ou as tensões terminais, o que dá no mesmo) do ramo onde está inserido. O procedimento seguido na obtenção das equações de I_{km} e I_{mk}, neste caso, é o mesmo dos casos precedentes, e pode ser facilmente repetido por analogia. A única diferença, em relação às expressões (1.19), é que o coeficiente de E_k na equação de I_{km} passa a ser $a^2 y_{km}$ em vez de y_{km}. Uma possibilidade prática

e simples de se representar aproximadamente um defasador com $a \neq 1$ consiste em utilizar-se de um modelo constituido de um transformador em-fase ($t = a$) em série com um defasador puro ($t = e^{j\varphi}$).

1.3. *Fluxos de potência ativa e reativa*

As expressões dos fluxos de potência ativa P_{km} e potência reativa Q_{km} podem ser obtidas a partir dos modelos apresentados na seção precedente, conforme será mostrado a seguir.

1.3.1. *Linhas de transmissão*

Já foi visto anteriormente que a corrente I_{km} em uma linha de transmissão é dada por

$$I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + jb_{km}^{sh} E_k \tag{1.20}$$

O fluxo de potência complexa correspondente é

$$S_{km}^* = P_{km} - jQ_{km} = E_k^* I_{km} =$$

$$= y_{km} V_k \, e^{-j\theta_k} (V_k \, e^{j\theta_k} - V_m \, e^{j\theta_m}) + jb_{km}^{sh} \, V_k^2 \tag{1.21}$$

Os fluxos P_{km} e Q_{km} são obtidos identificando-se as partes reais e imaginárias dessa equação complexa, resultando

$$\begin{aligned} P_{km} &= V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos\theta_{km} - V_k V_m b_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} \\ Q_{km} &= -V_k^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + V_k V_m b_{km} \cos\theta_{km} - V_k V_m g_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Os fluxos P_{mk} e Q_{mk} são obtidos analogamente:

$$\begin{aligned} P_{mk} &= V_m^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos\theta_{km} + V_k V_m b_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} \\ Q_{mk} &= -V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + V_k V_m b_{km} \cos\theta_{km} + V_k V_m g_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} \end{aligned} \tag{1.23}$$

As perdas de potência ativa e reativa na linha são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} P_{km} + P_{mk} &= g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2 V_k V_m \cos\theta_{km}) = g_{km} \, | E_k - E_m |^2 \\ Q_{km} + Q_{mk} &= -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - b_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2 V_k V_m \cos\theta_{km}) = \\ &= -b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2) - b_{km} \, | E_k - E_m |^2 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Notar que $|E_k - E_m|$ é a magnitude da tensão sobre o elemento série do modelo equivalente π; $g_{km}|E_k - E_m|^2$ são as perdas ôhmicas; $-b_{km}|E_k - E_m|^2$ são as perdas reativas no elemento série; e $-b_{km}^{sh}(V_k^2 + V_m^2)$ corresponde à geração de potência reativa nos elementos *shunt* (lembrar que, em linhas reais, $b_{km} < 0$ e $b_{km}^{sh} > 0$).

1.3.2. *Transformadores em-fase*

Foi visto na seção precedente que a corrente I_{km} em um transformador em-fase é

$$I_{km} = a_{km} y_{km}(a_{km} E_k - E_m) \tag{1.25}$$

O fluxo de potência complexa correspondente é dado por

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= P_{km} - jQ_{km} = E_k^* I_{km} = \\ &= y_{km}\, a_{km}\, V_k\, e^{-j\theta_k}(a_{km} V_k\, e^{j\theta_k} - V_m\, e^{j\theta_m}) \end{aligned} \tag{1.26}$$

Os fluxos P_{km} e Q_{km} são obtidos identificando-se as partes reais e imaginárias dessa equação complexa, resultando

$$\begin{aligned} P_{km} &= (a_{km} V_k)^2 g_{km} - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cos\theta_{km} - (a_{km} V_k) V_m b_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} \\ Q_{km} &= -(a_{km} V_k)^2 b_{km} + (a_{km} V_k) V_m b_{km} \cos\theta_{km} - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Estas expressões poderiam ter sido obtidas por inspeção comparando-se (1.26) com (1.21): em (1.26) não aparece o termo $jb_{km}^{sh} V_k^2$ e, no lugar de V_k, aparece $a_{km} V_k$. Conseqüentemente, as expressões de P_{km} e Q_{km} para o transformador em-fase são as mesmas deduzidas para linhas de transmissão, bastando ignorar o termo que depende de b_{km}^{sh} e substituir V_k por $a_{km} V_k$.

1.3.3. *Transformadores defasadores*

Para o defasador puro foi visto que

$$I_{km} = y_{km}(E_k - e^{-j\varphi_{km}} E_m) = y_{km}\, e^{-j\varphi_{km}}(E_k\, e^{j\varphi_{km}} - E_m) \tag{1.28}$$

O fluxo de potência complexa correspondente é dado por

$$\begin{aligned} S_{km}^* &= P_{km} - jQ_{km} = E_k^* I_{km} = \\ &= y_{km}\, V_k\, e^{-j(\theta_k + \varphi_{km})}(V_k\, e^{j(\theta_k + \varphi_{km})} - V_m\, e^{j\theta_m}) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Os fluxos P_{km} e Q_{km} são obtidos identificando-se as partes reais e imaginárias dessa equação complexa, resultando

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - V_k V_m b_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km})$$
$$Q_{km} = -V_k^2 b_{km} + V_k V_m b_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - V_k V_m g_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) \quad (1.30)$$

Estas expressões poderiam ter sido obtidas por inspeção comparando-se (1.29) com (1.21): em (1.29) não aparece o termo $jb_{km}^{sh} V_k^2$ e, no lugar de θ_k, aparece $\theta_k + \varphi_{km}$. Conseqüentemente, as expressões de P_{km} e Q_{km} para o desafador são as mesmas deduzidas para linhas de transmissão, bastando ignorar o termo que depende de b_{km}^{sh} e substituir θ_{km} por $\theta_{km} + \varphi_{km}$.

1.3.4. *Expressões gerais dos fluxos*

Os fluxos de potência ativa e reativa em linhas de transmissão, transformadores em-fase, defasadores puros e defasadores, obedecem às expressões gerais

$$P_{km} = (a_{km} V_k)^2 g_{km} - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + \\ - (a_{km} V_k) V_m b_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km})$$
$$Q_{km} = -(a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (a_{km} V_k) V_m b_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + \\ - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) \quad (1.31)$$

No caso de linhas de transmissão, $a_{km} = 1$ e $\varphi_{km} = 0$. Para transformadores em-fase, $b_{km}^{sh} = 0$ e $\varphi_{km} = 0$. Para os defasadores puros, $b_{km}^{sh} = 0$ e $a_{km} = 1$. Finalmente, para os defasadores, $b_{km}^{sh} = 0$.

No início deste capítulo, foi formulado o problema do fluxo de carga como sendo composto de dois sistemas algébricos: o sistema de equações (1.1) e o conjunto de inequações (1.2). Neste ponto, é interessante notar que os fluxos P_{km} e Q_{km}, que aparecem em (1.1), são dados genericamente pelas expressões (1.31).

1.4. *Formulação matricial*

A injeção líquida de corrente na barra k pode ser obtida aplicando-se a Primeira Lei de Kirchhoff à situação geral representada na Fig. 1.1:

$$I_k + I_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} \quad (k = 1, NB) \quad (1.32)$$

A corrente I_{km} em uma linha de transmissão (Fig. 1.2), transformador em-fase (Fig. 1.4) e defasador puro (Fig. 1.6) é dada, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} I_{km} &= (y_{km} + jb_{km}^{sh})E_k + (-y_{km})E_m \\ I_{km} &= (a_{km}^2 y_{km})E_k + (-a_{km}y_{km})E_m \\ I_{km} &= (y_{km})E_k + (-e^{-j\varphi_{km}}y_{km})E_m \end{aligned} \tag{1.33}$$

conforme já foi demonstrado anteriormente (expressões (1.20), (1.25) e (1.28), respectivamente). As expressões (1.33) podem ser postas na seguinte forma geral:

$$I_{km} = (a_{km}^2 y_{km} + jb_{km}^{sh})E_k + (-a_{km}e^{-j\varphi_{km}}y_{km})E_m, \tag{1.34}$$

sendo que, para linhas de transmissão, $a_{km} = 1$ e $\varphi_{km} = 0$; para transformadores em-fase, $b_{km}^{sh} = 0$ e $\varphi_{km} = 0$; e, para defasadores puros, $b_{km}^{sh} = 0$ e $a_{km} = 1$. [Lembrar que os defasadores com $a_{km} \neq 1$ são representados como um defasador puro ($a_{km} = 1$) em série com um transformador em-fase ($\varphi_{km} = 0$).]

Considerando-se I_{km} dado em (1.34), a expressão de I_k (1.32) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$I_k = \left[jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km})\right] E_k + \sum_{m \in \Omega_k} (-a_{km}e^{j\varphi_{km}}y_{km})E_m \tag{1.35}$$

Esta expressão, para $k = 1, NB$, pode ser posta na forma matricial

$$\underline{I} = Y\underline{E}, \tag{1.36}$$

em que

$\underline{I}$ – vetor das injeções de corrente, cujas componentes são I_k ($k = 1, NB$)
$\underline{E}$ – vetor das tensões nodais cujas, componentes são $E_k = V_k e^{j\theta_k}$
$Y = G + jB$ – matriz admitância nodal

Os elementos da matriz Y são:

$$\begin{aligned} Y_{km} &= -a_{km}e^{-j\varphi_{km}}y_{km} \\ Y_{kk} &= jb_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (jb_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km}) \end{aligned} \tag{1.37}$$

Em geral, essa matriz é esparsa, ou seja, tem uma grande proporção de elementos nulos, pois $Y_{km} = 0$ sempre que entre os nós k e m não existirem linhas ou transformadores. Note-se que, se o elemento existente entre as barras k e m for uma linha de transmissão, $Y_{km} = -y_{km}$; se for um transformador em fase, $Y_{km} = -a_{km}y_{km}$; e, se for um defasador puro,

$Y_{km} = -e^{-j\varphi_{km}} y_{km}$. Se a rede for formada de linhas de transmissão e transformadores em-fase, a matriz Y será simétrica. A presença de defasadores torna a matriz assimétrica, pois neste caso, para o modelo da Fig. 1.6, $Y_{km} = -e^{-j\varphi_{km}} y_{km}$ e $Y_{mk} = -e^{j\varphi_{km}} \cdot y_{km}$

A injeção de corrente I_k, que é a k-ésima componente do vetor $\underline{I}$, pode ser colocada na forma

$$I_k = Y_{kk} E_k + \sum_{m \in \Omega_k} Y_{km} E_m = \sum_{m \in K} Y_{km} E_m, \tag{1.38}$$

em que K é o conjunto de todas as barras m adjacentes à barra k, incluindo a própria barra k, ou seja, o conjunto K é formado pelos elementos do conjunto Ω_k mais a própria barra k. Considerando-se que $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ e $E_m = V_m e^{j\theta_m}$, a expressão (1.38) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$I_k = \sum_{m \in K} (G_{km} + jB_{km})(V_m e^{j\theta_m}) \tag{1.39}$$

A injeção de potência complexa S_k é

$$S_k^* = P_k - jQ_k = E_k^* I_k \tag{1.40}$$

Substituindo-se (1.39) em (1.40) e considerando-se que $E_k^* = V_k e^{-j\theta_k}$, obtém-se:

$$S_k^* = V_k e^{-j\theta_k} \sum_{m \in K} (G_{km} + jB_{km})(V_m e^{j\theta_m}) \tag{1.41}$$

As injeções de potência ativa e reativa podem ser obtidas identificando-se as partes real e imaginária da expressão (1.41):

$$\begin{aligned} P_k &= V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen}\theta_{km}) \\ Q_k &= V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \operatorname{sen}\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km}) \end{aligned} \tag{1.42}$$

1.5. *Impedância equivalente entre dois nós*

Nesta seção será desenvolvida uma expressão que dá a impedância (ou a admitância) equivalente entre dois nós quaisquer de uma rede de impedâncias modeladas por $\underline{I} = Y\underline{E}$. Este resultado é muito importante e será utilizado várias vezes nos capítulos subseqüentes.

Seja $Z = Y^{-1}$ a matriz impedância nodal da rede (Y e Z simétricas). A impedância equivalente entre os nós k e m pode ser determinada como se segue:

i) Imagine-se que todas as fontes de corrente ($\underline{I}$) são desligadas da rede e que uma fonte de corrente ideal e unitária seja ligada entre os nós k e m, conforme está indicado na Fig. 1.7.

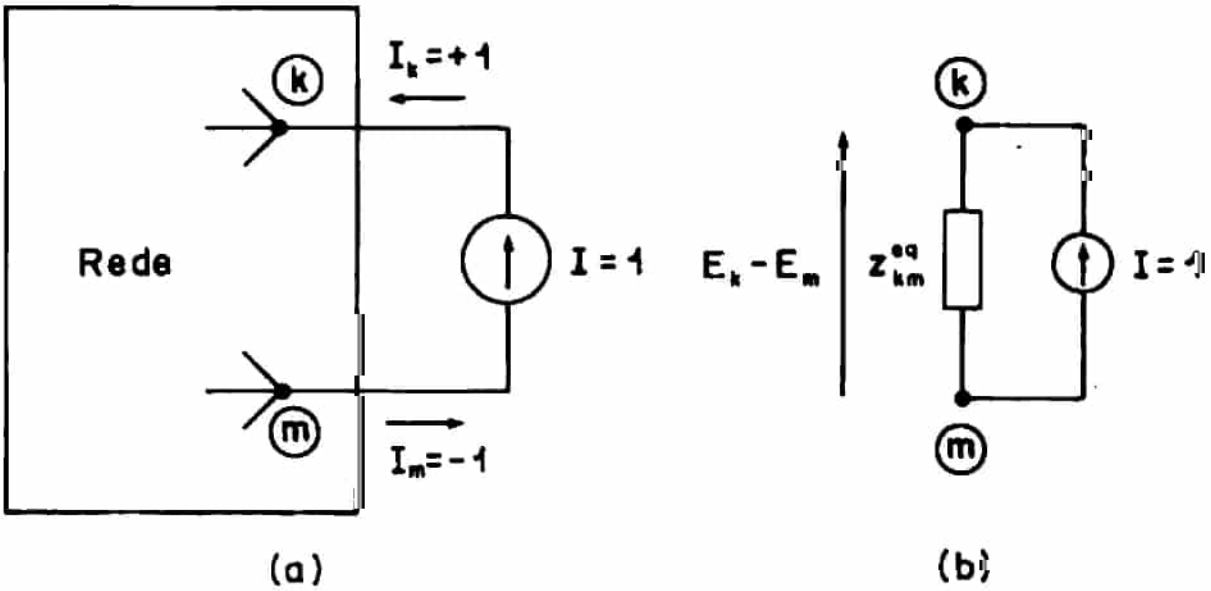


Figura 1.7 – Determinação de z_{km}^{eq}

ii) Nesta situação, a diferença de tensão entre os nós k e m será dada por

$$E_k - E_m = Z_{kk} + Z_{mm} - 2\,Z_{km} \tag{1.43}$$

sendo Z_{kk}, Z_{mm} e Z_{km} elementos da matriz Z, conforme é indicado a seguir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ E_k \\ \vdots \\ E_m \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{E}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & Z_{kk} & & Z_{km} & \\ & \vdots & & \vdots & \\ & Z_{mk} & & Z_{mm} & \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}}_{Z} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ +1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{I}} \begin{matrix} \\ k \\ \\ m \\ \end{matrix} \tag{1.44}$$

iii) A impedância equivalente z_{km}^{eq} é dada pelo cociente da queda de tensão entre os nós $k-m$ e a corrente aplicada. Como a corrente é unitária tem-se

$$z_{km}^{eq} = Z_{kk} + Z_{mm} - 2\,Z_{km} \tag{1.45}$$

Problemas

1.1. Considerar um sistema constituído de três barras e três linhas de transmissão, cujos dados, em p. u., estão tabelados a seguir (*ver o modelo equivalente π representado na Fig.* 1.2):

Linha	r	x	b^{sh}
1 – 2	0,10	1,00	0,05
1 – 3	0,20	2,00	0,10
2 – 3	0,10	1,00	0,05

a) Montar a matriz admitância nodal Y, tomando o nó terra como referência.
b) Colocar a matriz Y na forma $Y = G + jB$, em que G é a matriz condutância nodal e B é a matriz susceptância nodal.

1.2. Determinar a matriz impedância nodal ($Z = Y^{-1}$) para o sistema do problema precedente.

1.3. Determinar a impedância equivalente $z_{2.3}^{eq}$ entre os nós 2 e 3 da rede do Prob. 1.1.

1.4. Considerar $b_{1.2}^{sh} = b_{1.3}^{sh} = b_{2.3}^{sh} = 0$ para a rede do Prob. 1.1.

a) Calcular as matrizes Y e Z para o novo sistema, tomando a barra 1 como referência (note que não existem ligações para o nó terra; as matrizes Y e Z passam a ter dimensão 2×2).
b) Determinar a impedância equivalente $z_{2.3}^{eq}$ entre os nós 2 e 3 da nova rede; comparar com o resultado obtido no Prob. 1.3.

Capítulo 2

FLUXO DE CARGA LINEARIZADO

O fluxo de potência ativa em uma linha de transmissão é aproximadamente proporcional à abertura angular na linha e se desloca no sentido dos ângulos maiores para os ângulos menores. A relação entre os fluxos de potência ativa e as aberturas angulares é do mesmo tipo da existente entre os fluxos de corrente e as quedas de tensão em um circuito de corrente continua, para a qual é válida a Lei de Ohm. Esta propriedade possibilita o desenvolvimento de um modelo aproximado, chamado de **fluxo de carga CC**, que permite estimar, com baixo custo computacional e precisão aceitável para muitas aplicações, a distribuição dos fluxos de potência ativa em uma rede de transmissão. Este tipo de modelo linearizado tem encontrado muitas aplicações na análise de sistemas elétricos de potência, tanto em planejamento como na operação do sistema.

O fluxo de carga CC é baseado no acoplamento entre as variáveis P e θ (potência ativa/ângulo) e apresenta resultados tanto melhores quanto mais elevado o nível de tensão. Além disso, o mesmo tipo de relação válida para linhas de transmissão pode ser estendido também para transformadores em fase e defasadores. Este modelo linearizado, no entanto, não é aplicável para sistemas de distribuição em baixa tensão, nos quais os fluxos de potência ativa dependem também, e de maneira significativa, das quedas de tensão. Nestes sistemas é possível a utilização de modelos linearizados baseados em outras características físicas da rede, que não a relação P-θ.

Deve-se observar que o Modelo CC não leva em conta as magnitudes das tensões nodais, as potências reativas e os *taps* dos transformadores. Por esta razão ele não pode substituir por completo os métodos não-lineares de fluxo de carga, mas tem, todavia, grande utilidade em fases preliminares de estudos que exigem a análise de um grande número de casos, o que dificilmente poderia ser feito utilizando-se os métodos convencionais. Em fases subseqüentes dos estudos, se for necessário o conhecimento de variáveis como as magnitudes das tensões, os fluxos de potência reativa e os valores dos *taps* de transformadores, então deve-se partir para uma solução exata utilizando-se um dos métodos clássicos de fluxo de carga (Newton, desacoplado, etc.).

2.1. *Linearização*

Considere-se o fluxo de potência ativa P_{km} em uma linha de transmissão, dado pela expressão (1.22) deduzida no capítulo precedente:

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} - V_k V_m b_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} \tag{2.1}$$

O fluxo no extremo oposto da linha é

$$P_{mk} = V_m^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} + V_k V_m b_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}. \tag{2.2}$$

Já foi visto que as perdas de transmissão na linha são dadas por

$$P_{km} + P_{mk} = g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}). \tag{2.3}$$

Se os termos correspondentes às perdas forem desprezados nas expressões de P_{km} e P_{mk}, ter-se-á

$$P_{km} = -P_{mk} = -V_k V_m b_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} \tag{2.4}$$

As seguintes aproximações podem ainda ser introduzidas em (2.4):

$$\begin{aligned} V_k &\cong V_m \cong 1\ pu \\ \operatorname{sen} \theta_{km} &\cong \theta_{km} \\ b_{km} &\cong \frac{-1}{x_{km}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

O fluxo P_{km} pode então ser aproximado por

$$P_{km} = x_{km}^{-1} \theta_{km} = \frac{\theta_k - \theta_m}{x_{km}}. \tag{2.6}$$

Esta equação tem a mesma forma que a Lei de Ohm aplicada a um resistor percorrido por corrente contínua, sendo P_{km} análogo à intensidade da corrente; θ_k e θ_m análogos às tensões terminais; e x_{km} análogo à resistência. Por esta razão, o modelo da rede de transmissão baseado na relação (2.6) é também conhecido como Modelo CC.

Considere-se agora o fluxo de potência ativa P_{km} em um transformador em-fase, dado pela expressão (1.27) deduzida no capítulo precedente:

$$P_{km} = (a_{km} V_k)^2 g_{km} - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cos \theta_{km} - (a_{km} V_k) V_m b_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} \tag{2.7}$$

Desprezando-se os termos correspondentes às perdas e introduzindo-se as aproximações (2.5), chega-se a

$$P_{km} = a_{km} x_{km}^{-1} \theta_{km}, \tag{2.8}$$

sendo que a_{km} pode ainda ser aproximado por $a_{km} \cong 1$, caso em que a expressão do fluxo de potência ativa no transformador se reduz à expressão (2.6) válida para linhas de transmissão.

O fluxo de potência ativa P_{km} em um defasador puro é dado pela expressão (1.30):

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - V_k V_m b_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) \tag{2.9}$$

Desprezando-se os termos correspondentes às perdas e considerando-se $V_k = V_m = 1 pu$ e $b_{km} = x_{km}^{-1}$ chega-se a

$$P_{km} = x_{km}^{-1} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) \tag{2.10}$$

Os ângulos θ_{km} e φ_{km} podem ter, individualmente, valores elevados. O mesmo, entretanto, não ocorre com a abertura angular efetiva $\theta_{km} + \varphi_{km}$ existente sobre a admitância y_{km}, que é da mesma ordem de magnitude das aberturas angulares existentes em linhas de transmissão e transformadores em fase. Isto permite que seja feita a aproximação

$$P_{km} = x_{km}^{-1}(\theta_{km} + \varphi_{km}) \tag{2.11}$$

O fluxo P_{km} tem duas componentes: uma, que depende do estado dos nós terminais ($x_{km}^{-1}\theta_{km}$) e, outra, que só depende do ângulo do defasador ($x_{km}^{-1}\varphi_{km}$). Considerando-se φ_{km} como sendo constante (no caso em que φ_{km} varia automaticamente pode-se tomar o valor básico), a expressão (2.11) pode ser representada pelo modelo linearizado da Fig. 2.1, onde a componente invariante do fluxo ($x_{km}^{-1}\varphi_{km}$) aparece como uma carga adicional na barra k e uma geração adicional na barra m (ou vice-versa, para φ_{km} negativo).

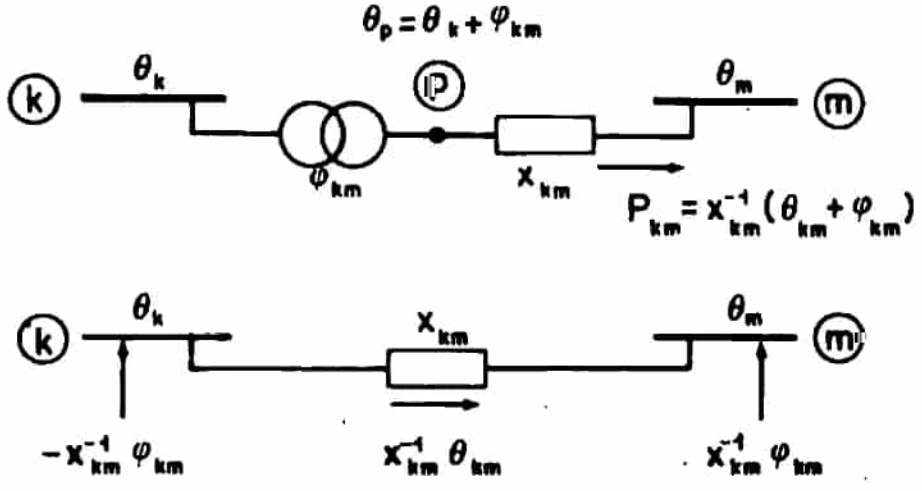


Figura 2.1 – Modelo linearizado de um transformador defasador puro

2.2. *Formulação matricial* ($\underline{P} = B'\underline{\theta}$)

O modelo linearizado desenvolvido anteriormente pode ser expresso matricialmente por uma equação do tipo $\underline{I} = Y\underline{E}$. Para maior simplicidade de exposição, considere-se inicialmente uma rede de transmissão sem transformadores em-fase ou defasadores. Neste caso, os fluxos de potência ativa nos ramos da rede são dados por

$$P_{km} = x_{km}^{-1}\theta_{km} \tag{2.12}$$

em que x_{km} é a reatância de todas as linhas em paralelo que existem no ramo $k-m$.

A injeção de potência ativa na barra k é igual à soma dos fluxos que saem da barra, ou seja:

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1}\theta_{km} \qquad (k = 1,\ NB) \tag{2.13}$$

Esta expressão pode ser colocada na forma

$$P_k = \left(\sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1}\right)\theta_k + \sum_{m \in \Omega_k} \left(-x_{km}^{-1}\theta_m\right) \tag{2.14}$$

que por sua vez admite uma representação matricial do tipo

$$\underline{P} = B'\underline{\theta} \tag{2.15}$$

em que:

$\underline{\theta}$ – vetor dos ângulos das tensões nodais θ_k

$\underline{P}$ – vetor das injeções líquidas de potência ativa

B' – matriz tipo admitância nodal e cujos elementos são:

$$\begin{aligned} B'_{km} &= -x_{km}^{-1} \\ B'_{kk} &= \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \end{aligned} \tag{2.16}$$

A matriz B', que aparece em (2.15), é singular, pois, como as perdas de transmissão foram desprezadas, a soma dos componentes de $\underline{P}$ é nula, ou seja, a injeção de potência em uma barra qualquer pode ser obtida a partir da soma algébrica das demais. Para resolver este problema, elimina-se uma das equações do sistema (2.15) e adota-se a barra correspondente como referência angular ($\theta_k = 0$). Desta forma, esse sistema passa a ser não-singular com dimensão $NB-1$ e os ângulos das $NB-1$ barras

restantes podem ser determinados a partir das injeções de potência especificadas nessas $NB-1$ barras (supõe-se que a rede seja conexa).

Considere-se agora um sistema no qual, além de linhas de transmissão, existem também transformadores em-fase e defasadores. Em relação ao modelo desenvolvido anteriormente ($\underline{P} = B'\underline{\theta}$), duas observações devem ser feitas: uma referente à formação da matriz dos coeficientes B' e outra quanto ao vetor independente $\underline{P}$. Transformadores em-fase e defasadores são tratados da mesma forma que as linhas de transmissão na formação da matriz de B', ou seja, a regra de formação dessa matriz é a mesma para os três tipos de componentes. No que se refere ao vetor $\underline{P}$, deve-se levar em conta em sua formação a existência das injeções equivalentes utilizadas na representação de defasadores, conforme é indicado na Fig. 2.1.

Considere-se como exemplo o sistema representado na Fig. 2.2, no qual a barra 5 foi adotada como referência. Neste caso, o modelo $\underline{P} = B'\underline{\theta}$ assume a forma

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1.2}^{-1}+x_{1.5}^{-1} & -x_{1.2}^{-1} & 0 & 0 \\ -x_{1.2}^{-1} & x_{1.2}^{-1}+x_{2.3}^{-1}+x_{2.5}^{-1} & -x_{2.3}^{-1} & 0 \\ 0 & -x_{2.3}^{-1} & x_{2.3}^{-1}+x_{3.4}^{-1} & -x_{3.4}^{-1} \\ 0 & 0 & -x_{3.4}^{-1} & x_{3.4}^{-1}+x_{4.5}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

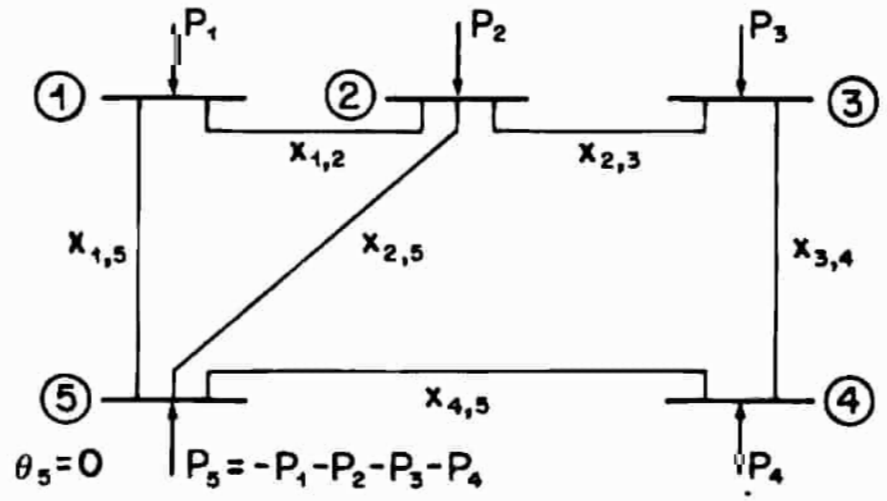


Figura 2.2 — Rede-exemplo de cinco barras

A utilização do modelo $\underline{P} = B'\underline{\theta}$ pode ser ilustrada pelo sistema de três barras representado na Fig. 2.3, onde todos os dados aparecem em *p.u.*. As matrizes B' e $(B')^{-1}$ são dadas, respectivamente, por

$$B' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad (B')^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{bmatrix}$$

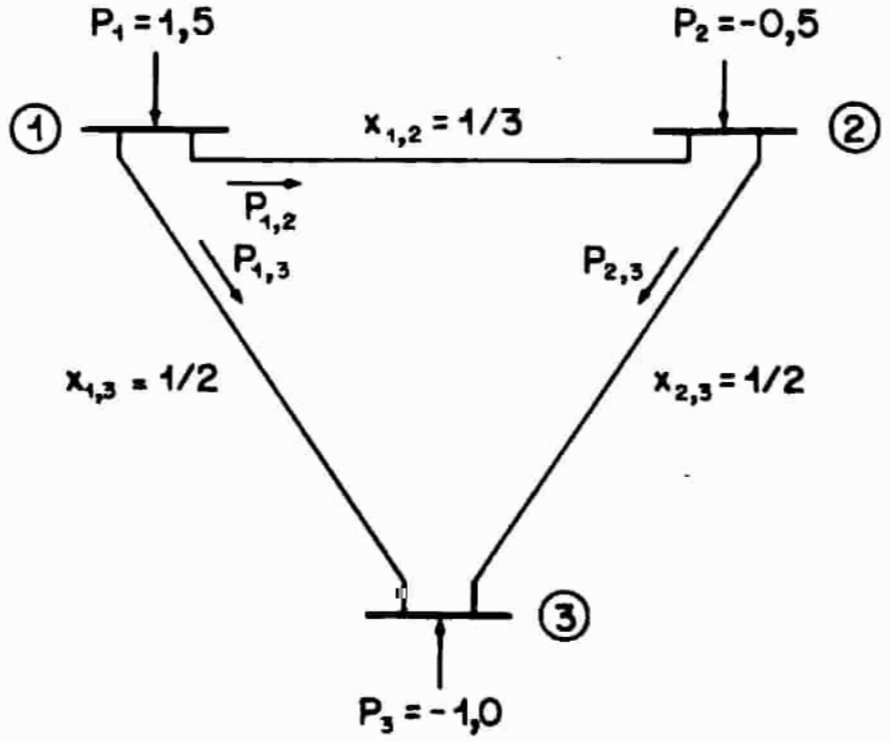


Figura 2.3 – Rede-exemplo de três barras

Os ângulos nodais (em radianos) são obtidos da seguinte maneira:

$$\underline{\theta} = (B')^{-1}\underline{P} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -3/8 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\theta_2 = -0,25$ e $\theta_3 = -0,375$. Os fluxos nas linhas são dadas por

$$P_{1.2} = x_{1.2}^{-1}\,\theta_{1.2} = 0,75$$

$$P_{1.3} = x_{1.3}^{-1}\,\theta_{1.3} = 0,75$$

$$P_{2.3} = x_{2.3}^{-1}\,\theta_{2.3} = 0,25$$

2.3. *Modelo CC*

A relação $\underline{P} = B'\underline{\theta}$ pode ser interpretada como o modelo de uma rede de resistores alimentada por fontes de corrente contínua, em que $\underline{P}$ é o vetor das injeções de corrente, $\underline{\theta}$ é o vetor das tensões nodais e B' é a matriz admitância (condutância) nodal. Assim sendo, todas as propriedades válidas para circuitos em corrente contínua podem ser utilizadas para facilitar o entendimento do modelo linearizado da rede de transmissão. No Modelo CC, a componente P_k do vetor $\underline{P}$ é a intensidade de uma fonte de corrente continua ligada entre o nó k e a barra de referência; a reatância x_{km} é interpretada como uma resistência; e θ_k, como a tensão do nó k. A Fig. 2.4 representa o Modelo CC correspondente à rede-exemplo de cinco barras dada na Fig. 2.2.

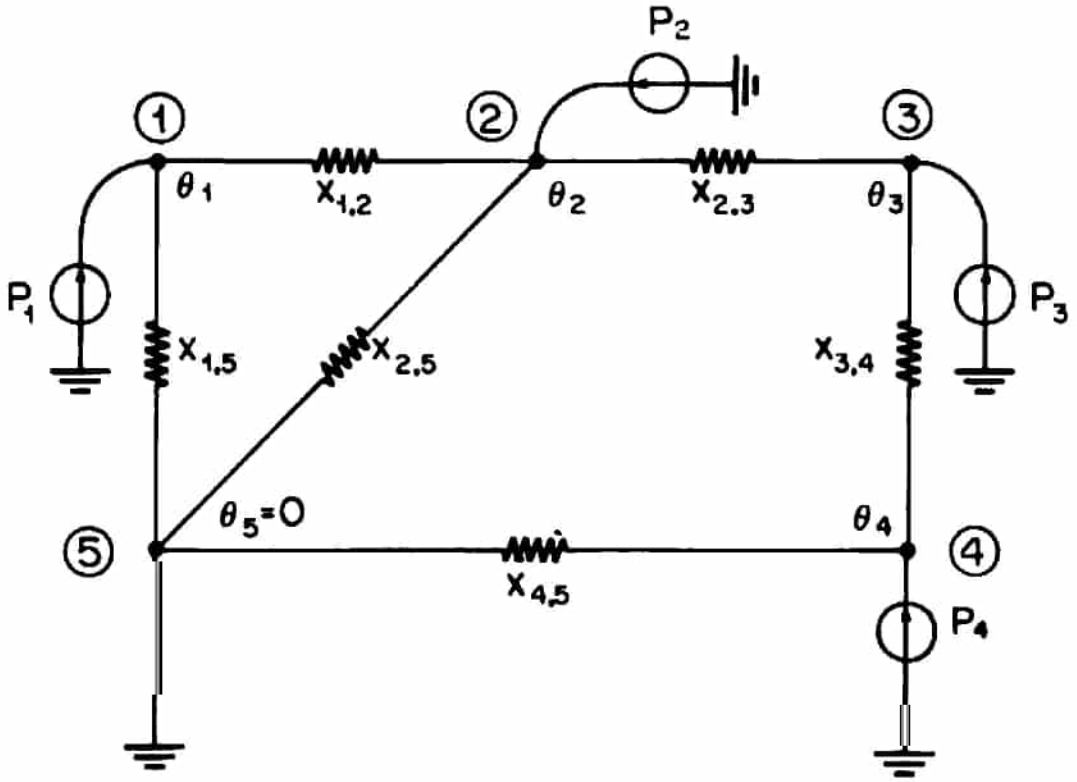


Figura 2.4 – Modelo CC para a rede-exemplo de cinco barras da Fig. 2.2

Uma caracteristica importante do modelo linearizado é o fato de ele fornecer uma solução mesmo para problemas que não poderiam ser resolvidos pelos métodos convencionais de fluxo de carga. Isso ocorre freqüentemente em estudos de planejamento quando, para uma dada rede, testam-se acréscimos de carga/geração. Nesses estudos observam-se problemas de convergência nos programas de fluxo de carga causados ou por insuficiência de suporte de potência reativa ou, então, por falta de capacidade de transmissão para atender às novas condições de carga.

Em ambos os casos, o modelo linearizado fornece uma solução que pode servir como indicativo do que está ocorrendo com a rede. Mesmo sendo aproximada, a solução do Modelo CC é mais útil que a informação dada por um programa convencional de fluxo de carga que diz simplesmente que a convergência não foi obtida. A única condição exigida para que o Modelo CC forneça uma solução é que a matriz B' não seja singular, o que equivale a exigir que a rede seja conexa.

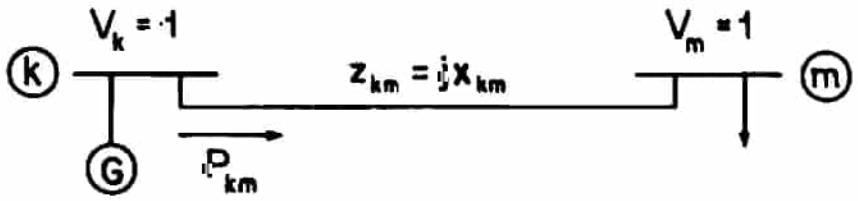


Figura 2.5 — Rede-exemplo de duas barras

Considere-se o sistema de duas barras representado na Fig. 2.5, no qual as magnitudes das tensões nodais são unitárias e a resistência da linha é nula. A Fig. 2.6 apresenta duas curvas $P \times \theta$ para o sistema da Fig. 2.5. A curva 1 se refere ao Modelo CA

$$P_{km} = x_{km}^{-1} \operatorname{sen} \theta_{km} \tag{2.17}$$

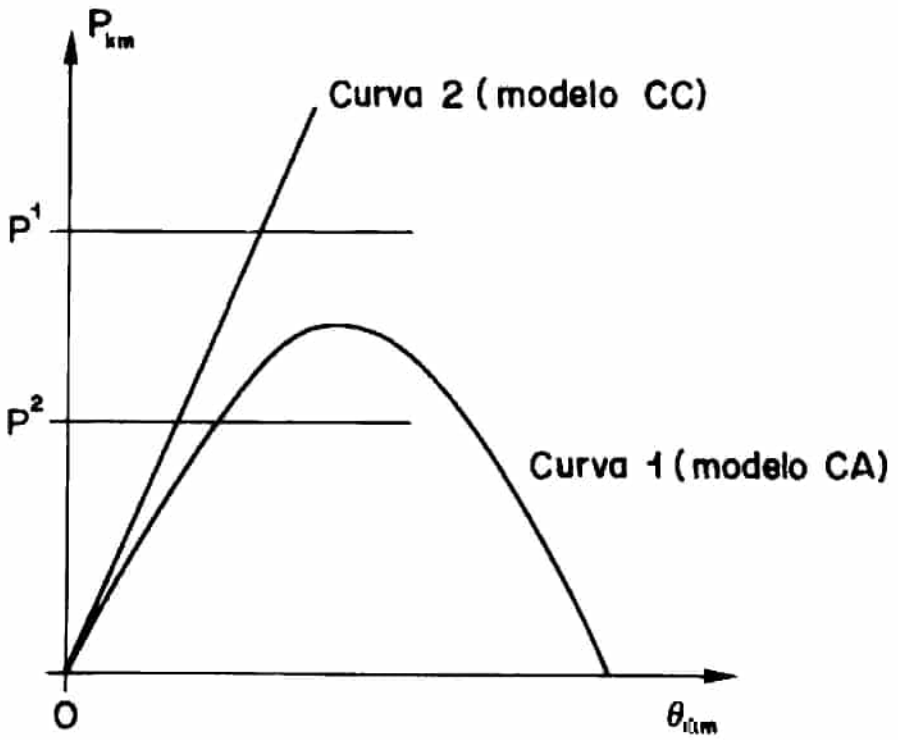


Figura 2.6 — Curvas $P \times \theta$ para os modelos CC e CA

enquanto a curva 2 corresponde ao Modelo CC

$$P_{km} = x_{km}^{-1}\theta_{km} \tag{2.18}$$

Pode-se notar que, para um nível de carga P^2, ambos os modelos fornecem uma solução. Já para um nível de carga mais elevado, P^1, o modelo não-linear não tem solução. A solução fornecida pelo Modelo CC, apesar de incorreta, pode ser útil pois dá uma idéia de quanto está sendo excedida a capacidade de transmissão da linha, enquanto o modelo não-linear simplesmente diz que não há solução viável.

Conforme foi apontado anteriormente, uma outra razão pela qual os métodos convencionais de fluxo de carga apresentam dificuldades de convergência em alguns estudos de planejamento é a falta de conhecimento sobre o comportamento reativo do sistema (reatores, condensadores, *taps*, barras *PV*, etc.). O modelo linearizado $\underline{P} = B'\underline{\theta}$ ignora a parte reativa do problema, que então só será considerada em fases subseqüentes do estudo, quando se tiver uma idéia mais concreta sobre as condições futuras do sistema.

2.4. *Representação das perdas no Modelo CC*

Em redes de transmissão com dimensões elevadas, [2] o montante das perdas de transmissão pode ser muito grande quando comparado com o nível de geração da barra de referência (ou barra de folga). Por exemplo, perdas totais de 500 MW para um nível de geração na barra de referência de 1 000 MW. Em situações como esta, os fluxos estimados pelo Modelo CC nas linhas que estão ligadas diretamente à barra de referência, ou estão em suas proximidades, podem apresentar erros muito elevados (100%, por exemplo) devido à não consideração das perdas de transmissão e da conseqüente redução da geração da barra de referência (por exemplo, em vez de gerar 1 000 MW, gera apenas 500). Visto de outra forma, pode-se dizer que as perdas correspondem a cargas distribuídas por todo o sistema, e que são atendidas pela barra de referência. Isto porque, na formulação usual do fluxo de carga CA, a injeção de potência ativa na barra de referência não é especificada, sendo dada pelas perdas de transmissão (só conhecidas após a resolução do problema) mais a carga líquida de todas as demais barras do sistema (cargas menos geração). Nesta seção será apresentada uma maneira aproximada e de baixo custo computacional de se incluir o efeito das perdas de transmissão no Modelo CC.

Considere-se mais uma vez a expressão da potência ativa P_k (1.42), deduzida no capitulo precedente e reescrita a seguir:

$$P_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}), \tag{2.19}$$

em que K é o conjunto das barras vizinhas da barra k, incluindo-se a própria barra k. Aproximando-se as magnitudes das tensões nodais por 1 p.u., e rearranjando-se o somatório, obtém-se

$$P_k = G_{kk} + \sum_{m \in \Omega_k} (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) \tag{2.20}$$

em que Ω_k é o conjunto das barras vizinhas da barra k, excluindo-se a própria barra k. Considerando-se que

$$\begin{aligned} G_{km} &= -g_{km} \\ G_{kk} &= \sum_{m \in \Omega_k} g_{km} \\ B_{km} &\cong x_{km}^{-1} \end{aligned} \tag{2.21}$$

obtém-se

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} (1 - \cos \theta_{km}) g_{km} + \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \operatorname{sen} \theta_{km}$$

Aproximando-se

$$\begin{aligned} \cos \theta_{km} &\cong 1 - \theta_{km}^2/2 \\ \operatorname{sen} \theta_{km} &\cong \theta_{km} \end{aligned} \tag{2.23}$$

obtém-se, finalmente,

$$P_k - 1/2 \sum_{m \in \Omega_k} g_{km} \theta_{km}^2 = \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \theta_{km} \tag{2.24}$$

Qual o significado de $g_{km}\theta_{km}^2$? Esta pergunta pode ser respondida analisando-se a expressão das perdas de transmissão na linha $k-m$.

$$Perdas = P_{km} + P_{mk} = g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \tag{2.25}$$

Fazendo-se $V_k = V_m = 1 p.u.$ e aproximando-se $\cos \theta_{km}$ por $1 - \theta_{km}^2/2$, obtém-se

$$Perdas = P_{km} + P_{mk} = g_{km} \theta_{km}^2 \tag{2.26}$$

Portanto, o lado esquerdo da Eq. (2.24) é dado pela injeção líquida de potência ativa na barra k menos a metade das perdas ativas de todas as linhas adjacentes a esta barra. Ou seja, o efeito das perdas pode ser representado aproximadamente como cargas adicionais obtidas dividindo-se as perdas de cada linha do sistema entre suas barras terminais (metade para cada lado). Desta forma, o Modelo CC passa a assumir a forma:

$$\underline{P} + \underline{P}^{\text{perdas}} = B'\underline{\theta} \tag{2.27}$$

ou seja, o novo modelo é obtido a partir do modelo original ($\underline{P} = B'\underline{\theta}$), adicionando-se o vetor $\underline{P}^{\text{perdas}}$ ao vetor das injeções nodais de potência ativa.

Um procedimento que pode ser adotado na resolução do sistema (2.27) consiste em calcular uma solução temporária $\tilde{\underline{\theta}}$ resolvendo-se o sistema $\underline{P} = B'\tilde{\underline{\theta}}$, no qual o efeito das perdas é ignorado; calcular as perdas aproximadas a partir da solução $\tilde{\underline{\theta}}$ e distribuí-las como cargas adicionais por todo o sistema, conforme foi descrito anteriormente; finalmente, resolver o sistema (2.27), incluindo as perdas calculadas no passo precedente e determinar o estado da rede $\underline{\theta}$, a partir do qual podem ser estimados os fluxos de potência ativa. Neste procedimento são resolvidos dois sistemas lineares (para determinar $\tilde{\underline{\theta}}$ e $\underline{\theta}$, respectivamente), com vetores independentes distintos ($\underline{P}$ e $\underline{P} + \underline{P}^{\text{perdas}}$, respectivamente), mas com a mesma matriz dos coeficientes B'. Ou seja, se a matriz inversa $(B')^{-1}$ for calculada para a resolução do sistema $\underline{P} = B'\tilde{\underline{\theta}}$, a mesma matriz pode ser utilizada na resolução do sistema $\underline{P} + \underline{P}^{\text{perdas}} = B'\underline{\theta}$ (o mesmo é válido se em lugar da inversa de B' forem utilizados seus fatores triangulares LDU no processo de resolução).

Na análise de contingências de linhas/transformadores é necessária a resolução de vários sistemas semelhantes que correspondem a uma série de configurações da rede obtidas a partir de uma configuração básica pela remoção de uma (ou mais) linha/transformador por vez. Neste tipo de aplicação, pode-se considerar, sem deteriorar a qualidade dos resultados, que o vetor $\underline{P}^{\text{perdas}}$ permanece o mesmo para todas as contingências. Isto significa que basta calcular o vetor de perdas para a configuração básica.

Problemas

2.1. Considerar uma linha de transmissão $k-m$ cujos parâmetros do modelo equivalente π são: $r_{km} = 0{,}1$ p.u., $x_{km} = 1{,}0$ p.u. e $b_{km}^{sh} = 0{,}05$ p.u. (*ver a Fig.* 1.2). As magnitudes das tensões das barras terminais são $V_k = 1{,}0$ p.u. e $V_m = 0{,}98$ p.u.; a abertura angular na linha é $\theta_{km} = 15°$.
a) Calcular o fluxo de potência ativa P_{km}.

b) Calcular as perdas de transmissão de potência ativa (potência ativa dissipada na linha).
c) Calcular o fluxo de potência ativa P_{km} utilizando a Eq. (2.4), que foi obtida desprezando-se as perdas de transmissão.
d). Calcular o fluxo de potência ativa P_{km} utilizando a Eq. (2.6), que corresponde ao modelo CC.

2.2. Considerar novamente a rede de três barras descrita no Prob. 1.1, do Cap. 1. As injeções de potência ativa nas barras 2 e 3 são $P_2 = -0{,}05$ e $P_3 = -0{,}015$ p.u. Determinar a distribuição dos fluxos de potência ativa na rede, utilizando o modelo de fluxo de carga CC. Adotar a barra 1 como referência angular ($\theta_1 = 0°$).

2.3. No sistema utilizado no problema precedente, a linha 1-2 é substituída por um defasador puro, cujos parâmetros são: $x_{1,2} = 1{,}0$ e $\varphi_{1,2} = +10°$.
a) Determinar o modelo CC do defasador (*ver a Fig.* 2.1).
b) Determinar a distribuição dos fluxos de potência ativa na rede, utilizando o fluxo de carga CC.
c) Repetir os itens *a* e *b* considerando-se, agora, $\varphi_{1,2} = -10°$.

Capítulo 3

ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Vários problemas de análise de redes de energia elétrica envolvem a resolução de sistemas algébricos lineares de grandes dimensões com matrizes de coeficientes altamente esparsas (por exemplo, matrizes com 99% de elementos nulos). Além da matriz admitância nodal Y, pode-se citar como exemplos outras matrizes que aparecem em programas de fluxo de carga e que apresentam estruturas semelhantes à da matriz Y, como é o caso da matriz Jacobiana do método de Newton (incluindo as versões desacopladas) e da matriz B' do fluxo de carga CC.

Os sistemas lineares mencionados anteriormente podem ser representados de uma forma geral por

$$A\underline{x} = \underline{b} \tag{3.1}$$

em que A é a matriz dos coeficientes ($n \times n$), $\underline{x}$ é o vetor dependente ($n \times 1$) e $\underline{b}$ é o vetor independente ($n \times 1$). No caso de soluções repetidas para ℓ vetores independentes com a mesma matriz A, tanto $\underline{x}$ como $\underline{b}$ passam a ser matrizes ($n \times \ell$).

Uma maneira de se resolver o sistema (3.1) seria pela obtenção da matriz A^{-1} explicitamente. Isto, no entanto, além de ser computacionalmente pouco eficiente, seria impraticável para matrizes A com dimensões elevadas. A razão é que, apesar de A ser esparsa nos problemas mencionados anteriormente, sua inversa A^{-1} em geral é cheia. As técnicas de fatoração triangular de matrizes esparsas [3] (decomposição $A = LDU$) utilizadas na resolução de sistemas lineares evitam a utilização da matriz A^{-1}, operando só com as matrizes-fatores L, D e U, que são esparsas. Essas técnicas de esparsidade consistem basicamente em armazenamento compacto dos termos não-nulos da matriz dos coeficientes; determinação ótima da ordem de pivoteamento; aplicação do método da eliminação de Gauss para a obtenção dos fatores triangulares da matriz dos coeficientes; e, finalmente, obtenção da solução do sistema para um ou mais vetores independentes utilizando-se os fatores triangulares obtidos anteriormente.

3.1. *Matrizes tipo admitância nodal*

A matriz admitância nodal Y é a matriz dos coeficientes do modelo linear:

$$\underline{I} = Y\underline{E} \tag{3.2}$$

em que $\underline{I}$ é o vetor de injeções de corrente e $\underline{E}$ é o vetor das tensões nodais (ambos complexos). No Cap. 1, onde essa expressão foi desenvolvida, foi mostrado também que a componente I_k do vetor $\underline{I}$ é dada por

$$I_k = Y_{kk}E_k + \sum_{m\in\Omega_k} Y_{km}E_m \tag{3.3}$$

em que Ω_k é o conjunto das barras vizinhas à barra k. Isto significa que, na linha da matriz Y correspondente à barra k, só são diferentes de zero os elementos Y_{km}, para $m=k$ ou $m\in\Omega_k$. Dito de outra forma, a razão pela qual aparecem zeros na matriz Y é que o fluxo de corrente em uma ligação $k-m$ só depende do estado dos nós k e m (lembrar que a injeção de corrente na barra k é dada pela soma dos fluxos nas ligações adjacentes mais a corrente no elemento shunt). Um exemplo de matriz admitância nodal é dado na Fig. 3.1. Neste caso, a existência de um circuito entre os nós 2 e 3 implica que os elementos (2,3) e (3,2) da matriz admitância são diferentes de zero.

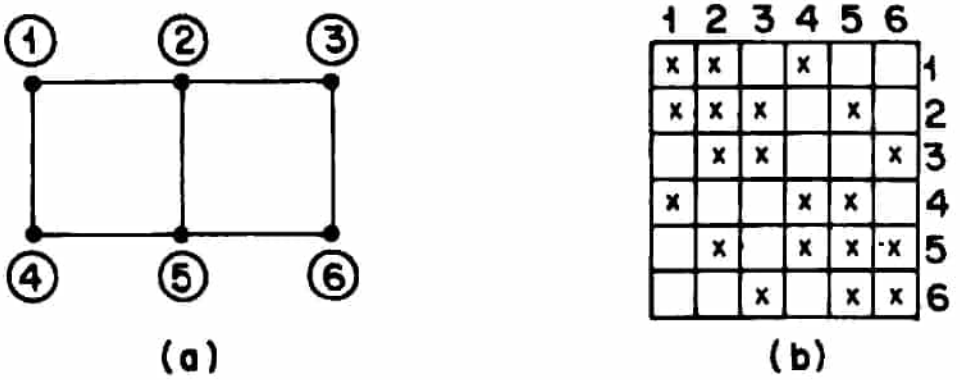


Figura 3.1 — Estrutura da matriz admitância nodal: (*a*) rede e (*b*) matriz Y

O grau de esparsidade de uma matriz é definido como a porcentagem de elementos nulos dessa matriz. Em particular, a matriz admitância nodal de um sistema de NB barras e NR ramos, com referência no nó-terra, tem um grau de esparsidade dado por

$$GE = \frac{NB^2 - (NB + 2NR)}{NB^2} \cdot 100\% \tag{3.4}$$

Para um sistema com 100 barras ($NB=100$) e 200 ramos ($NR=200$), o grau de esparsidade é de 95%. Para um sistema com $NB=1\,000$ e

$NR = 2\,000$, o grau de esparsidade é de 99,5%. Nos exemplos precedentes, considerou-se que uma barra tem em média quatro ramos ligados a ela ($NR = 2NB$). Em sistemas reais, entretanto, este número em geral é menor que quatro ($NR < 2NB$), significando que os graus de esparsidade são ainda maiores que os estimados anteriormente. Outra observação importante é que o grau de esparsidade cresce com as dimensões da rede. Isto se deve ao fato de o número médio de ramos ligados a uma barra ser praticamente independente das dimensões da rede (na expressão (3.4), para uma relação NR/NB constante, GE é uma função crescente de NB). O efeito das dimensões da rede sobre o grau de esparsidade pode ser avaliado comparando-se os exemplos dados nas Figs. 3.1 e 3.2. Note-se que a segunda rede é uma expansão da primeira e que o número de ramos adjacentes aos nós 1, 2 e 3 é o mesmo na rede inicial e na expandida, o que implica uma maior porcentagem de zeros nas três primeiras linhas e colunas da matriz admitância nodal.

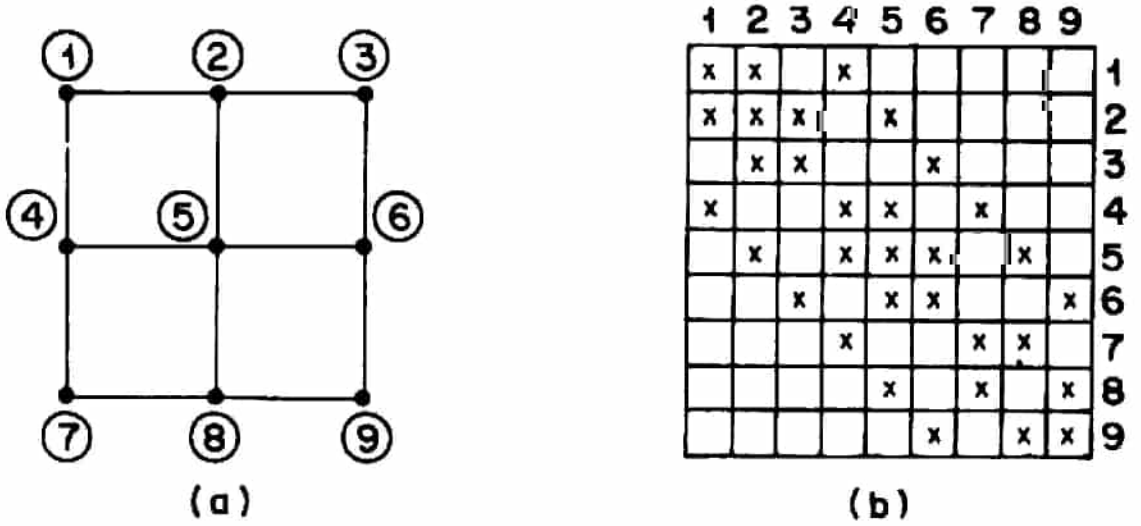


Figura 3.2 – Estrutura da matriz admitância nodal: (*a*) rede e (*b*) matriz Y

3.2. *Método da eliminação de Gauss*

O sistema algébrico linear (3.1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

A solução desse sistema pode ser obtida aplicando-se o **método da eliminação de Gauss** em três etapas: na primeira, são zerados os elementos do triângulo inferior da matriz dos coeficientes pelas combinações lineares efetuadas com as equações que constituem o sistema (3.5); na segunda etapa, os elementos da diagonal principal são feitos iguais a 1, dividindo-se cada equação pelo elemento correspondente da diagonal principal da matriz de coeficientes resultante do passo precedente; e, na terceira etapa, são zerados os elementos do triângulo superior (pelas combinações lineares), o que acaba por transformar a matriz dos coeficientes numa matriz identidade. Os sistemas resultantes em cada uma das três etapas descritas anteriormente são dados, respectivamente, pelas Eqs. (3.6), (3.7) e (3.8):

$$\begin{bmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & a'_{1,3} & \cdots & a'_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \cdots & a'_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \cdots \\ b'_n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a''_{1,2} & a''_{1,3} & \cdots & a''_{1,n} \\ 0 & 1 & a''_{2,3} & \cdots & a''_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ \cdots \\ b''_n \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'''_1 \\ b'''_2 \\ \cdots \\ b'''_n \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Note-se que as mesmas operações efetuadas com as linhas da matriz dos coeficientes são simultaneamente realizadas com o vetor independente.

Considere-se como exemplo o seguinte sistema de terceira ordem ($n = 3$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -4 & -7 & 10 \\ 2 & 7 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Após cada uma das três etapas do processo de resolução por eliminação de Gauss, o sistema assume, respectivamente, as formas

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

o que fornece a solução $x_1 = -5/2$, $x_2 = -3$ e $x_3 = -3$. Note-se que neste exemplo, pelo fato de a matriz ser cheia, não aparecem claramente as vantagens da aplicação do método da eliminação de Gauss a sistemas com matrizes de coeficientes esparsas, nas quais uma parte dos coeficientes já é formada de zeros, o que reduz o trabalho de eliminação.

Existem dois esquemas básicos de se aplicar o método da eliminação de Gauss para se zerar os triângulos inferior e superior da matriz dos coeficientes, conforme está indicado na Fig. 3.3. Para se zerar o triângulo inferior pelo esquema *a*, as colunas são operadas uma por vez, da esquerda para a direita, sendo os elementos de cada coluna zerados de cima para

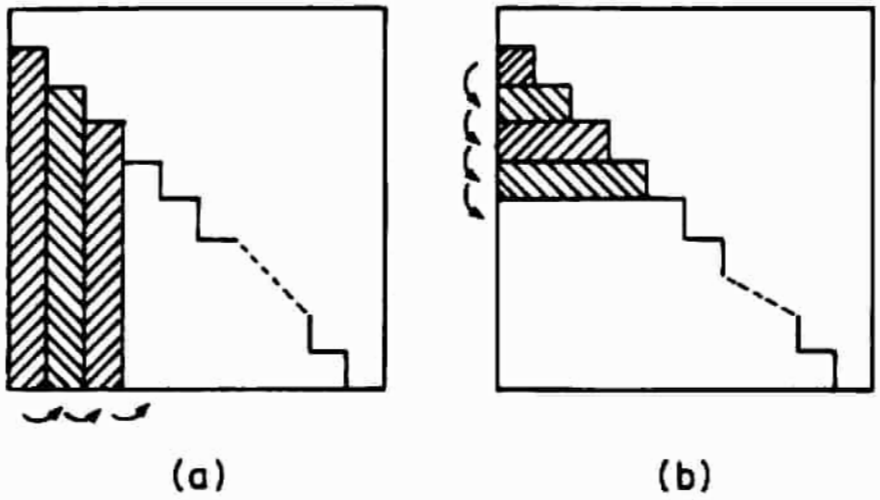


Figura 3.3 – Esquemas de eliminação por colunas (*a*) e por linhas (*b*)

baixo. No esquema *b*, as linhas são operadas uma por vez, de cima para baixo, sendo os elementos de cada linha zerados da esquerda para a direita. Para se zerar o triângulo superior, no esquema *a* as colunas são percorridas da esquerda para a direita e, no esquema *b*, as linhas são percorridas de baixo para cima. Estes procedimentos garantem que os zeros obtidos nos passos iniciais não serão destruídos nos passos subseqüentes do processo de eliminação.

3.3. *Matrizes elementares*

Foi visto anteriormente que o método da eliminação de Gauss consiste basicamente em se obter a solução de um sistema do tipo $A\underline{x} = \underline{b}$ pelas combinações lineares efetuadas com as linhas da matriz dos coeficientes A e com os elementos do vetor independente $\underline{b}$. Essas combinações lineares podem ser interpretadas como operações com matrizes elementares do tipo

$$T_{ij} = \begin{array}{c} \overset{j}{} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & c_{ij} & & 1 \end{bmatrix} \end{array} i \quad ; \quad T_{ii} = \begin{array}{c} \overset{i}{} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c_{ii} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} i \qquad (3.9)$$

Em um estágio intermediário qualquer do processo de eliminação, para se zerar o elemento (i, j) da matriz dos coeficientes basta premultiplicá-la pela matriz elementar T_{ij} com $c_{ij} = -a_{ij}/a_{jj}$, em que a_{ij} e a_{jj}

são os valores atuais dos elementos (i,j) e (j,j) da matriz. Para tornar unitário o elemento (i,i) da matriz dos coeficientes, basta premultiplicá-la pela matriz elementar T_{ii} com $c = 1/a_{ii}$. Note-se que, quando essas operações são feitas ordenadamente, como ocorre no método da eliminação de Gauss, uma operação elementar não destrói o efeito (zeros) produzido pela operações precedentes.

Considere-se mais uma vez o exemplo estudado anteriormente: a primeira operação do processo de eliminação, que consiste em zerar o elemento (2,1) da matriz dos coeficientes, pode ser expressa como uma operação elementar com uma matriz $T_{2,1}$ com $c_{2,1} = -a_{2,1}/a_{1,1} = 2$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -4 & -7 & 10 \\ 2 & -7 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

O mesmo é válido para a operação correspondente com o vetor $\underline{b}$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De maneira análoga, as demais combinações lineares efetuadas durante o processo de eliminação podem ser representadas pelas operações com matrizes elementares.

Premultiplicar uma matriz de coeficientes A por uma matriz elementar T_{ij} de mesma ordem $(T_{ij}A)$ corresponde a substituir a linha i da matriz A pela combinação linear da própria linha i com a linha j multiplicada pelo fator c_{ij}. Analogamente, premultiplicar uma matriz de coeficientes A por uma matriz elementar T_{ii} de mesma ordem $(T_{ii}A)$ corresponde a multiplicar a linha i da matriz A por c_{ii}. Isto significa que, quando uma matriz elementar (T_{ij} ou T_{ii}) premultiplicar uma matriz de coeficientes, ela realizará nessa matriz as mesmas combinações lineares que devem ser efetuadas em uma matriz identidade de mesma ordem para se obter a matriz elementar em questão. (Ou seja, a matriz T_{ij} é obtida a partir da matriz identidade premultiplicando-se a linha j por c_{ij} e adicionando-se o resultado à linha i, que são as mesmas operações realizadas sobre uma matriz de coeficientes quando premultiplicada por T_{ij}. Raciocínio análogo vale para a matriz T_{ii}.)

O método da eliminação de Gauss descrito anteriormente pode ser executado por uma seqüência de operações com matrizes elementares, conforme está ilustrado nas expressões (3.10) e (3.11). Note-se que as mesmas operações que transformam a matriz A na matriz identidade I_n (de ordem n) transformam também o vetor independente $\underline{b}$ no vetor solução $\underline{x}$.

$$T^q(T^{q-1}(\ldots(T^3(T^2(T^1A))))) = I_n \tag{3.10}$$

$$T^q(T^{q-1}(\ldots(T^3(T^2(T^1\underline{b}))))) = \underline{x} \tag{3.11}$$

Os parênteses são importantes pois indicam a ordem das operações, que é a seguinte:

$$\begin{aligned} T^1A &= A^1 \\ T^2A^1 &= A^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T^qA^{q-1} &= I_n \end{aligned} \tag{3.12}$$

em que cada premultiplicação por uma matriz elementar corresponde à eliminação de um elemento da matriz dos coeficientes ou então à normalização (para 1) de um elemento da diagonal principal.

Considere-se novamente o exemplo estudado na seção precedente. A seguir estão listadas todas as operações elementares indicadas em (3.12), que correspondem à aplicação do método da eliminação de Gauss para a resolução desse sistema:

$T^1A = A^1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -4 & -7 & 10 \\ 2 & 7 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

$T^2A^1 = A^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$T^3A^2 = A^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$T^6(T^5(T^4A^3) = A^6$ (operações na diagonal)

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^7A^6 = A^7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^8A^7 = A^8$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^9A^8 = A^9$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4. *Decomposição LDU*

A partir das expressões (3.10) e (3.11) pode-se ver que a matriz inversa A^{-1} pode ser posta na forma

$$A^{-1} = T^q T^{q-1} \dots T^3 T^2 T^1 \tag{3.13}$$

Chamando-se

$$[T^k]^{-1} = T_1^k \tag{3.14}$$

a matriz A pode ser colocada na forma fatorada:

$$A = T_1^1 T_1^2 T_1^3 \dots T_1^{q-1} T_1^q \tag{3.15}$$

em que a matrizes elementares invertidas são dadas por

$$T_{ij}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & -c_{ij} & & & \end{bmatrix} \\ i \end{array} \quad ; \quad T_{ii}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & i \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & c_{ii}^{-1} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \\ i \end{array} \tag{3.16}$$

Isto significa que, para se inverter a matriz elementar T_{ij}, basta trocar o sinal do elemento (i, j), passando de c_{ij} para $-c_{ij}$. No caso da matriz T_{ii}, obviamente, a inversa é obtida pela simples inversão do elemento c_{ii}.

Se as operações elementares indicadas em (3.12) forem realizadas para, pela ordem, zerar os elementos do triângulo inferior, normalizar os elementos da diagonal principal e zerar os elementos do triângulo superior, então a expressão (3.15) poderá ser reescrita na forma:

$$A = [L^1 L^2 \dots L^n][D^1 D^2 \dots D^n][U^1 U^2 \dots U^{n_u}] \tag{3.17}$$

em que L^i, D^i e U^i operam, respectivamente, no triângulo inferior, na diagonal e no triângulo superior da matriz dos coeficientes.

Sejam L_{km} e L_{ij} duas matrizes elementares correspondentes a operações efetuadas no triângulo inferior da matriz dos coeficientes. Considere-se ainda que, no processo de eliminação, o coeficiente (k, m) foi zerado antes que o coeficiente (i, j), ou seja, a matriz elementar L_{km} aparece antes que a matriz L_{ij}. Nessas condições, pode-se verificar que:

$$L_{km}L_{ij} = L_{km} + L_{ij} - I_n = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & m & & j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & -c_{km} & & \ddots & \\ & & & -c_{ij} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \\ k \\ \\ i \\ \\ \end{matrix} \qquad (3.18)$$

Ou seja, o produto $L_{km}L_{ij}$ é dado pela superposição das matrizes L_{km} e L_{ij}. Esta propriedade é válida tanto no esquema de eliminação por colunas como no esquema por linhas. Note-se, entretanto, que a relação (3.18) não é necessariamente obedecida no caso de as matrizes elementares L_{km} e L_{ij} serem multiplicadas em ordem trocada.

Utilizando-se a relação (3.18), pode-se verificar que

$$L^1L^2 \ldots L^{n_\ell} = I_n + \sum_{p=1}^{n_\ell} (L^p - I_n) = L \qquad (3.19)$$

ou seja, o produto das matrizes L^p, que correspondem às operações elementares efetuadas no triângulo inferior da matriz dos coeficientes, é uma matriz do tipo triangular inferior L obtida pela superposição das matrizes L^p. O mesmo tipo de propriedade vale para as matrizes elementares U^p que operam no triângulo superior:

$$U^1U^2 \ldots U^{n_u} = I_n + \sum_{p=1}^{n_u} (U^p - I_n) = U \qquad (3.20)$$

em que U é uma matriz do tipo triangular superior. No caso das matrizes D^p é fácil verificar que

$$D^1D^2 \ldots D^n = D \qquad (3.21)$$

Note-se que as matrizes L e U preservam parcialmente a esparsidade da matriz A. Os elementos não-nulos de L e U aparecem só nas posições em que a matriz original A tinha elementos não-nulos e em algumas outras posições que são preenchidas durante o processo de eliminação (elementos *fill-in*). A esparsidade das matrizes L e U baseia-se nas expressões (3.19) e (3.20), segundo as quais essas matrizes são dadas pela superposição das matrizes elementares correspondentes às operações efetuadas durante o processo de eliminação. As matrizes inversas L^{-1} e U^{-1}, ao contrário do que ocorre com L e U, são praticamente cheias. A razão para isto é que, para L^{-1} e U^{-1}, não valem as propriedades (3.19) e (3.20) pois $L^{-1} = L_1^{n_\ell}L_1^{n_\ell - 1} \ldots L_1^1$ e $U^{-1} = U_1^{n_u}U_1^{n_u - 1} \ldots U_1^1$, ou seja, os produtos das matrizes elementares aparecem na ordem invertida e assim sendo a relação (3.18) não é necessariamente observada.

Introduzindo-se (3.19), (3.20) e (3.21) em (3.17), chega-se finalmente à expressão da fatoração triangular da matriz A:

$$A = LDU \tag{3.22}$$

No caso de a matriz A ser simétrica, pode-se verificar que $L = U^t$.

Para o sistema de terceira ordem dado como exemplo anteriormente tem-se: $L^1 = T_1^1$, $L^2 = T_1^2$, $L^3 = T_1^3$, $D^1 = T_1^4$, $D^2 = T_1^5$, $D^3 = T_1^6$, $U^1 = T_1^7$, $U^2 = T_1^8$ e $U^3 = T_1^9$. As matrizes L, D e U para este exemplo são dadas, respectivamente, por

$$L = L^1L^2L^3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$D = D^1D^2D^3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$U = U^1U^2U^3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & -3 \\ \hline 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Considere-se como exemplo a determinação do estado (tensões nodais) da rede resistiva representada na Fig. 3.4, onde são dadas as condutâncias de todos os ramos e a intensidade das injeções de corrente (as injeções nos nós 1 e 3 são nulas). Neste exemplo, a equação $\underline{I} = Y\underline{E}$ assume a forma:

$$\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 6 \\ \hline 0 \\ \hline 2 \\ \hline -3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6 & -3 & -3 & & \\ \hline -3 & 6 & & -3 & \\ \hline -3 & & 6 & -1 & -2 \\ \hline & -3 & -1 & 5 & \\ \hline & & -2 & & 3 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline E_1 \\ \hline E_2 \\ \hline E_3 \\ \hline E_4 \\ \hline E_5 \\ \hline \end{array}$$

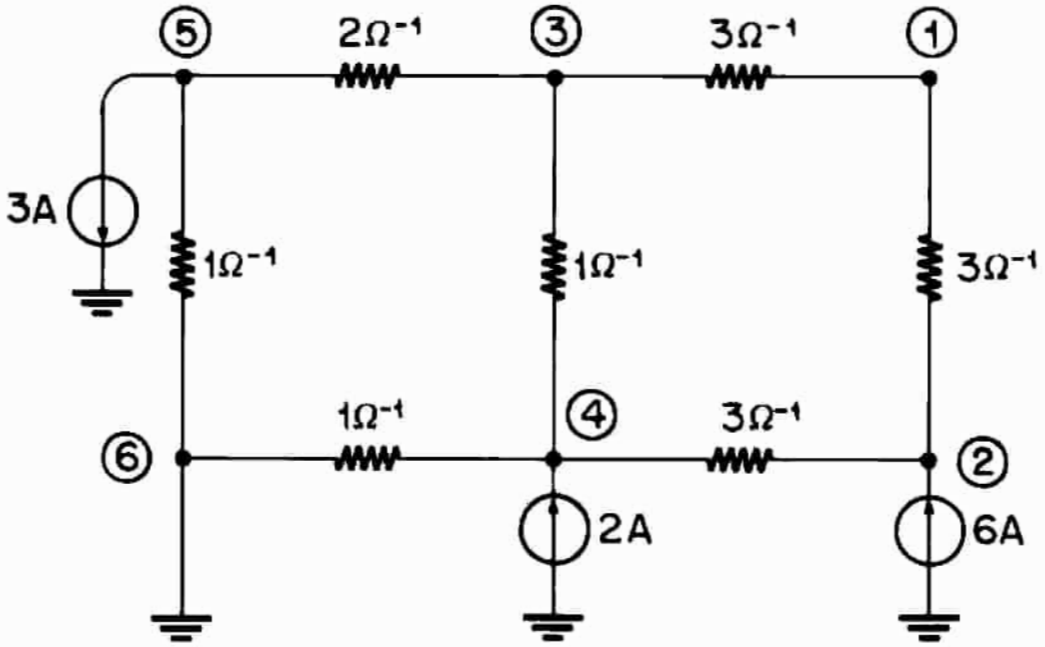


Figura 3.4 – Rede-exemplo de seis nós

A decomposição *LDU* da matriz dos coeficientes *Y*, obtida pela eliminação de Gauss, produz

$$L = U' = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1/2 & 1 & & & \\ -1/2 & -1/3 & 1 & & \\ & -2/3 & -1/2 & 0 & \\ & & -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & & & & \\ & 9/2 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 3/2 \end{bmatrix}$$

3.5. *Resolução do sistema* $A\underline{x} = \underline{b}$ *pelos fatores triangulares*

As Eqs. (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8) dão as principais etapas seguidas na resolução de um sistema algébrico do tipo $A\underline{x} = \underline{b}$ utilizando-se o método da eliminação de Gauss. Essas mesmas etapas podem ser descritas mais compactamente utilizando-se a decomposição LDU, ou seja:

$$A\underline{x} = LDU\underline{x} = \underline{b} \tag{3.23}$$

$$L^{-1}A\underline{x} = DU\underline{x} = L^{-1}\underline{b} = \underline{b}' \tag{3.24}$$

$$D^{-1}L^{-1}A\underline{x} = U\underline{x} = D^{-1}L^{-1}\underline{b} = \underline{b}'' \tag{3.25}$$

$$U^{-1}D^{-1}L^{-1}A\underline{x} = \underline{x} = U^{-1}D^{-1}L^{-1}\underline{b} = \underline{b}''' \tag{3.26}$$

em que as expressões (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26) correspondem, respectivamente, às Eqs. (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8). A solução $\underline{x}$ pode ser obtida em três etapas

$$\underline{x} = U^{-1}(D^{-1}(L^{-1}\underline{b})) \tag{3.27}$$

ou, posto de outra forma:

$$\underline{b}' = L^{-1}\underline{b} \tag{3.28}$$

$$\underline{b}'' = D^{-1}\underline{b}' \tag{3.29}$$

$$\underline{x} = \underline{b}''' = U^{-1}\underline{b}'' \tag{3.30}$$

Como as matrizes L^{-1} e U^{-1} são cheias (ou praticamente cheias), não é conveniente calculá-las explicitamente, e as operações indicadas em (3.28) e (3.30) são efetuadas conforme se indica a seguir:

$$\underline{b}' = (L_I^n(L_I^{n-1} \ldots (L_I^2(L_I^1\underline{b})) \ldots)) \tag{3.31}$$

$$\underline{b}'' = (D_I^n(D_I^{n-1} \ldots (D_I^2(D_I^1\underline{b}')) \ldots)) \tag{3.32}$$

$$\underline{x} = (U_I^{n-1}(U_I^{n-2} \ldots (U_I^2(U_I^1\underline{b}'')) \ldots)) \tag{3.33}$$

em que $L_I^p = (L^p)^{-1}$, $D_I^p = (D^p)^{-1}$ e $U_I^p = (U^p)^{-1}$ são obtidas pelas expressões (3.16). Isto significa que todas as informações necessárias para se transformar o vetor independente $\underline{b}$ no vetor-solução $\underline{x}$ estão contidas nas matrizes L, D e U, pois são constituídas de todos os elementos das matrizes elementares L^p, D^p e U^p. As matrizes inversas L_I^p e U_I^p utilizadas em (3.31) e (3.33) são facilmente obtidas a partir de L^p e U^p pela simples troca do sinal do elemento de fora da diagonal principal. Resumindo, a razão para se utilizar o procedimento indicado em (3.31), (3.32) e (3.33) em vez das expressões (3.28), (3.29) e (3.30) é que, apesar de as matrizes L^{-1} e U^{-1} serem cheias (ou praticamente cheias), as inversas L_I^p e U_I^p têm a mesma estrutura que L^p e U^p (diferem apenas de um sinal).

As operações com matrizes elementares utilizadas na resolução do sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ podem ser resumidas da seguinte maneira:

Matriz L

Adiciona-se ao conteúdo da posição i do vetor $\underline{b}$ (atual) o produto do conteúdo da posição j por $-\ell_{ij}$ ($b_i^{novo} = b_i^{velho} - b_j \ell_{ij}$), ordenadamente, para todos os elementos ℓ_{ij} da matriz L (pode-se utilizar o esquema de eliminação por linhas ou por colunas). Desta etapa resulta o vetor $\underline{b}'$.

Matriz D

Divide-se o conteúdo de cada uma das posições i do vetor $\underline{b}'$ por d_{ii}. Desta etapa resulta o vetor $\underline{b}''$ cujas componentes são $b_i'' = b_i'/d_{ii}$.

Matriz U

Adiciona-se ao conteúdo da posição i do vetor $\underline{b}''$ (atual) o produto do conteúdo da posição j por $-u_{ij}$, ordenadamente, para todos os elementos u_{ij} da matriz U.

Na Tab. 3.1 estão indicadas todas as operações efetuadas para transformar o vetor $\underline{b}$ no vetor $\underline{x}$, utilizando-se os fatores L, D e U, para o sistema de ordem 3 estudado anteriormente. Na formação desta tabela, por exemplo, para se passar da terceira coluna para a quarta, adicionou-se ao conteúdo da posição 3 da coluna 3 o produto do conteúdo da posição 2 por $-\ell_{3,2}$.

Na Tab. 3.2 estão indicadas todas as operações efetuadas para a obtenção do vetor-solução $\underline{E}$ para a rede-exemplo representada na Fig. 3.4.

	$\underline{b}$			$\underline{b}'$			$\underline{b}''$			$\underline{x}$
1	1	1	1	1	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$-^{17}/_2$	$-^5/^2$
2	1	3	3	3	3	3	3	−3	−3	−3
3	1	1	0	−9	−9	−9	−3	−3	−3	−3
	$\ell_{2,1}$	$\ell_{3,1}$	$\ell_{3,2}$	$d_{1,1}$	$d_{2,2}$	$d_{3,3}$	$u_{2,3}$	$u_{1,3}$	$u_{1,2}$	
	−2	1	3	2	1	3	−2	−3	2	
	L			D			U			

Tabela 3.1

	$\underline{I}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\underline{E}$	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$^3/_2$	4	1
2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	$^4/_3$	$^4/_3$	$^4/_3$	$^4/_3$	$^4/_3$	$^4/_3$	$^4/_3$	4	5	5	5	2
3	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1	3	3	3	3	3	3
4	2	2	2	2	6	7	7	7	7	7	7	$^7/_2$	$^7/_2$	4	4	4	4	4	4	4	4
5	−3	−3	−3	−3	−3	−3	−2	$^3/_2$	$^3/_2$	$^3/_2$	$^3/_2$	$^3/_2$	1	1	1	1	1	1	1	1	5
	$\ell_{2,1}$	$\ell_{3,1}$	$\ell_{3,2}$	$\ell_{4,2}$	$\ell_{4,2}$	$\ell_{5,3}$	$\ell_{5,4}$	$d_{1,1}$	$d_{2,2}$	$d_{3,3}$	$d_{4,4}$	$d_{5,5}$	$u_{4,5}$	$u_{3,5}$	$u_{3,4}$	$u_{2,4}$	$u_{2,3}$	$u_{1,3}$	$u_{1,2}$		
	$-^1/_2$	$-^1/_2$	$-^1/_3$	$-^2/_3$	$-^1/_2$	$-^1/_2$	$-^1/_2$	6	$^9/_2$	4	2	$^3/_2$	$-^1/_2$	$-^1/_2$	$-^1/_2$	$-^2/_3$	$-^1/_3$	$-^1/_2$	$-^1/_2$		
	L							D					U								

Tabela 3.2

3.6. *Eliminação de Gauss e redução de circuitos*

Considere-se novamente uma rede representada pela equação $Y\underline{E} = \underline{I}$, agora reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&Y_{11}E_1 + \ldots + Y_{1k}E_k + \ldots + Y_{1n}E_n = I_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&Y_{k1}E_1 + \ldots + Y_{kk}E_k + \ldots + Y_{kn}E_n = I_k \qquad (3.34) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&Y_{n1}E_1 + \ldots + Y_{nk}E_k + \ldots + Y_{nn}E_n = I_n
\end{aligned}$$

em que aparece explicitamente a tensão E_k de um nó genérico k. Os coeficientes Y_{mk} $(m = 1, n)$, que multiplicam E_k, só são diferentes de zero para $m \in \Omega_k$, ou seja, quando m for um nó vizinho do nó k. Observação análoga vale para os elementos Y_{km}, pois a matriz dos coeficientes Y é estruturalmente simétrica (apesar de nem sempre ser simétrica em valores, como ocorre quando existem transformadores defasadores).

O que se pretende analisar é o que ocorre com o sistema (3.34) quando o nó k é eliminado da rede. A eliminação de um nó qualquer de uma rede elétrica pode ser feita pela transformação $Y-\Delta$ generalizada, conforme se indica na Fig. 3.5. Este tipo de transformação corresponde à

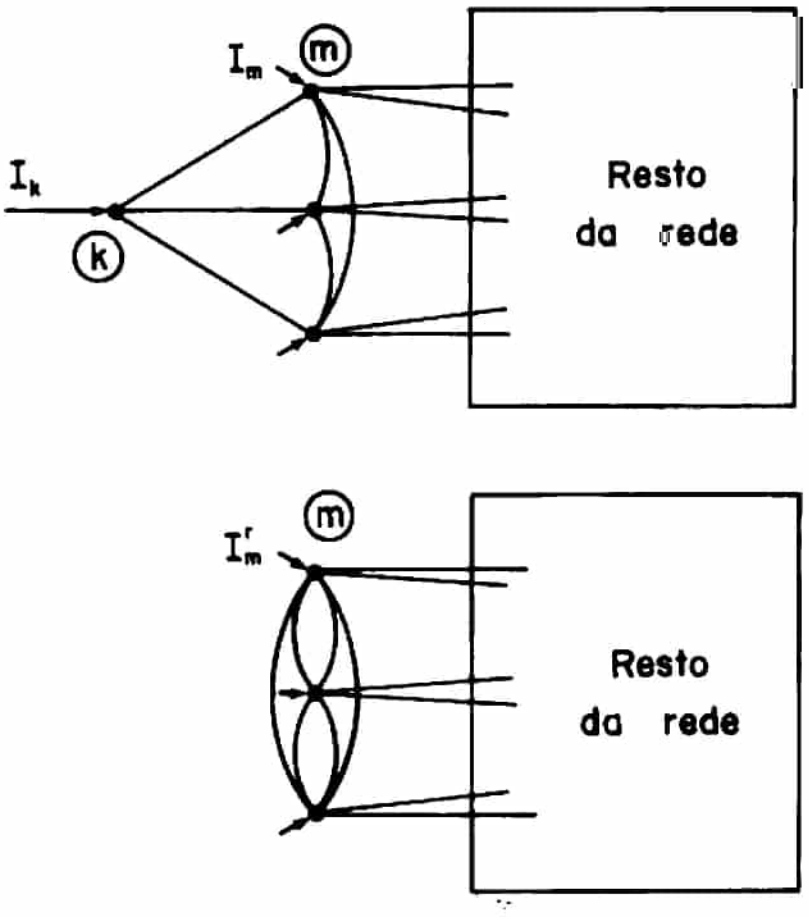


Figura 3.5 – Eliminação do nó k: transformação $Y-\Delta$ generalizada

eliminação da k-ésima equação do sistema (3.34) (utilizada para se determinar E_k). A tensão nodal E_k, por sua vez, é substituída nas demais $n-1$ equações. Obtém-se desta forma um sistema reduzido no qual não mais aparece a variável E_k bem como a equação correspondente ao nó k. Essas operações algébricas podem ser efetuadas utilizando-se a eliminação de Gauss, pela qual são efetuadas combinações lineares com as equações do sistema (3.34) visando a tornar nulos os coeficientes da variável E_k de todas as equações correspondentes aos nós vizinhos do nó k (lembrar que os demais coeficientes, com exceção de Y_{kk}, já eram nulos). Após essas operações, a equação referente ao nó k é removida do sistema, e o sistema reduzido resultante passa a ter os seguintes coeficientes:

$$Y'_{ij} = Y_{ij} - \frac{Y_{ik}\, Y_{kj}}{Y_{kk}} \tag{3.35}$$

que são os elementos da matriz admitância nodal da rede reduzida obtida pela eliminação do nó k. A expressão (3.35) mostra que Y'_{ij} será diferente

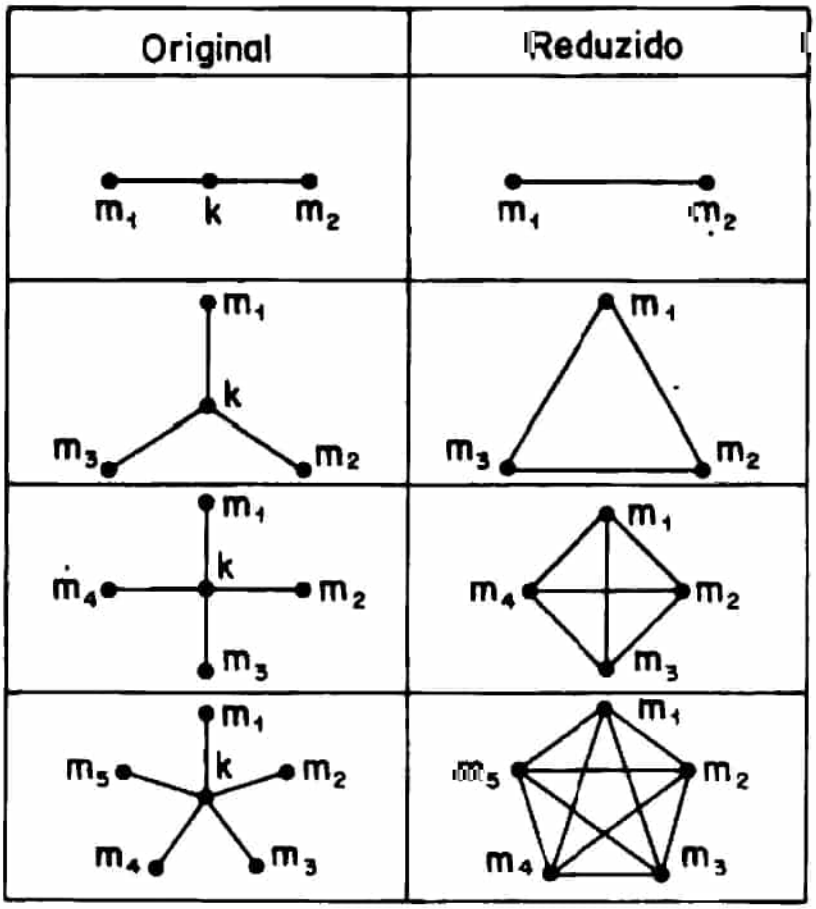


Figura 3.6 – Transformação $Y-\Delta$ generalizada

de Y_{ij} só se Y_{ik} e Y_{kj} forem, simultaneamente, diferentes de zero, o que só ocorre se tanto o nó i como o nó j pertencem à vizinhança do nó eliminado k, conforme se indicou na Fig. 3.5. Para todas as ligações em que pelo menos um dos nós terminais não pertencem à vizinhança de k, os elementos Y_{ij} da matriz Y permanecerão inalterados, pois nesses casos Y_{ik} e/ou Y_{jk} serão nulos. A eliminação do nó k torna (se já não for) sua vizinhança interligada de todas as maneiras possíveis pelas admitâncias $-Y_{ik}Y_{kj}/Y_{kk}$ colocadas em paralelo com as admitâncias Y_{ij} preexistentes. A Fig. 3.6 ilustra alguns casos da transformação $Y-\Delta$ generalizada.

As injeções dos nós pertencentes à vizinhança Ω_k são afetadas pelo processo de redução passando a ser dadas por:

$$I'_m = I_m - \frac{Y_{mk}}{Y_{kk}} I_k \tag{3.36}$$

sendo que as injeções dos demais nós da rede permanecem inalteradas. Esta expressão indica como a injeção do nó eliminado k se distribui sobre sua vizinhança. Note-se que as novas admitâncias Y'_{ij} e as novas correntes I'_m são tais que o estado da rede reduzida é o mesmo que o da original.

Considere-se como exemplo a rede representada na Fig. 3.7*a* na qual todas as admitâncias são consideradas reais e unitárias. O nó 6 é adotado como referência. A matriz admitância nodal é:

$$Y = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & & -1 & & \\ 2 & & 2 & -1 & -1 & \\ 3 & -1 & -1 & 3 & & -1 \\ 4 & & -1 & & 2 & -1 \\ 5 & & & -1 & -1 & 3 \end{array}$$

A remoção do nó 3 da rede pode ser representada pela eliminação de Gauss fazendo-se combinações lineares com as linhas da matriz Y de tal forma a zerar os elementos da terceira coluna. Dividindo-se a terceira linha por 3 e adicionando-a às linhas 1, 2 e 5, resulta:

$Y' =$

1	2	3	4	5	
$^5/_3$	$-^1/_3$			$-^1/_3$	1
$-^1/_3$	$^5/_3$		-1	$-^1/_3$	2
-1	-1	3		-1	3
	-1		2	-1	4
$-^1/_3$	$-^1/_3$		-1	$^8/_3$	5

Finalmente, removendo-se a terceira linha e a terceira coluna da matriz Y', obtém-se a matriz do sistema reduzido que está representado na Fig. 3.7b:

$Y^r =$

1	2	4	5	
$^5/_3$	$-^1/_3$		$-^1/_3$	1
$-^1/_3$	$^5/_3$	-1	$-^1/_3$	2
	-1	2	-1	4
$-^1/_3$	$-^1/_2$	-1	$^8/_3$	5

Pode-se observar pela Fig. 3.7 que só foram afetados pela eliminação os nós vizinhos do nó 3, ou seja, os nós 1, 2 e 5.

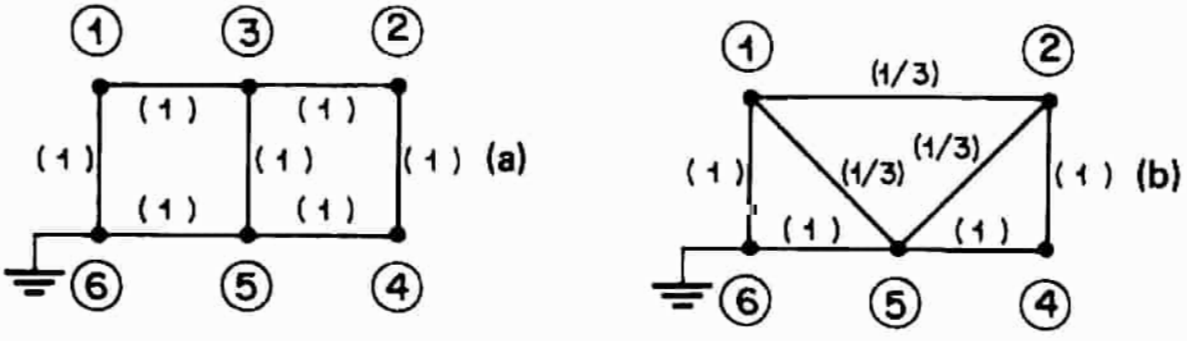
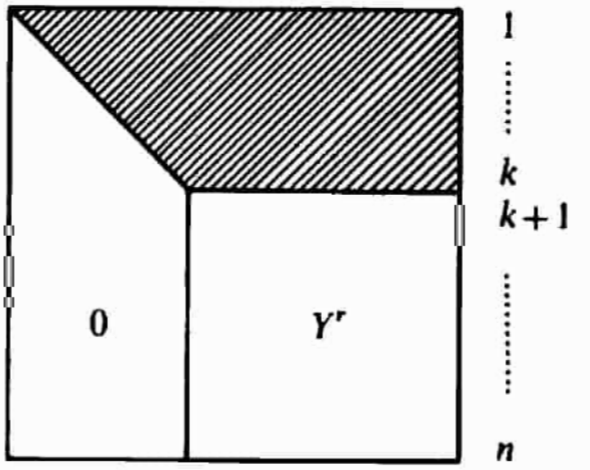


Figura 3.7 – Exemplo de eliminação de um nó

O processo de fatoração triangular de uma matriz admitância nodal corresponde ao processo de redução da rede, no qual os nós são eliminados segundo a ordem dada pela própria numeração. Adotando-se o esquema de eliminação por colunas, quando são zerados os elementos abaixo da diagonal principal da coluna k, as modificações estruturais na matriz correspondem às alterações produzidas na rede pela eliminação (redução) do nó k. Após a redução do nó k, tendo-se eliminado anteriormente os nós de 1 a $k-1$, a matriz admitância nodal assume a forma:



(3.37)

em que Y^r é a matriz admitância nodal da rede que resulta da eliminação dos nós de 1 a k. Os novos elementos que aparecem na matriz Y^r, e que não existiam na matriz original, correspondem às novas ligações que podem surgir durante o processo de redução da rede.

3.7. *Critérios de ordenação*

A matriz triangular inferior L (da mesma forma que a matriz U) não mantém o mesmo grau de esparsidade que a matriz original Y. A diferença é que, em L, aparecem alguns novos elementos em posições que estavam originalmente vagas. Considerando que o número de operações e as necessidades de armazenamento dependem basicamente do número de elementos não-nulos das matrizes L e U, é desejável que o aparecimento de novos elementos seja minimizado. Isto pode ser conseguido por um processo de renumeração dos nós da rede, visando-se a uma ordem mais favorável de pivoteamento. A idéia básica dos métodos mais usuais de renumeração consiste em se eliminar primeiro os nós que tenham o menor número de ligações.

A título de ilustração, a Fig. 3.8 apresenta uma rede de seis nós (o nó de referência não é mostrado) com duas numerações distintas. São mostradas também as estruturas das matrizes Y e U para os dois casos. Observa-se que o grau de enchimento da matriz U no caso b é muito maior que no caso a, porque no caso b são operadas inicialmente as colunas da matriz com maior número de elementos não-nulos.

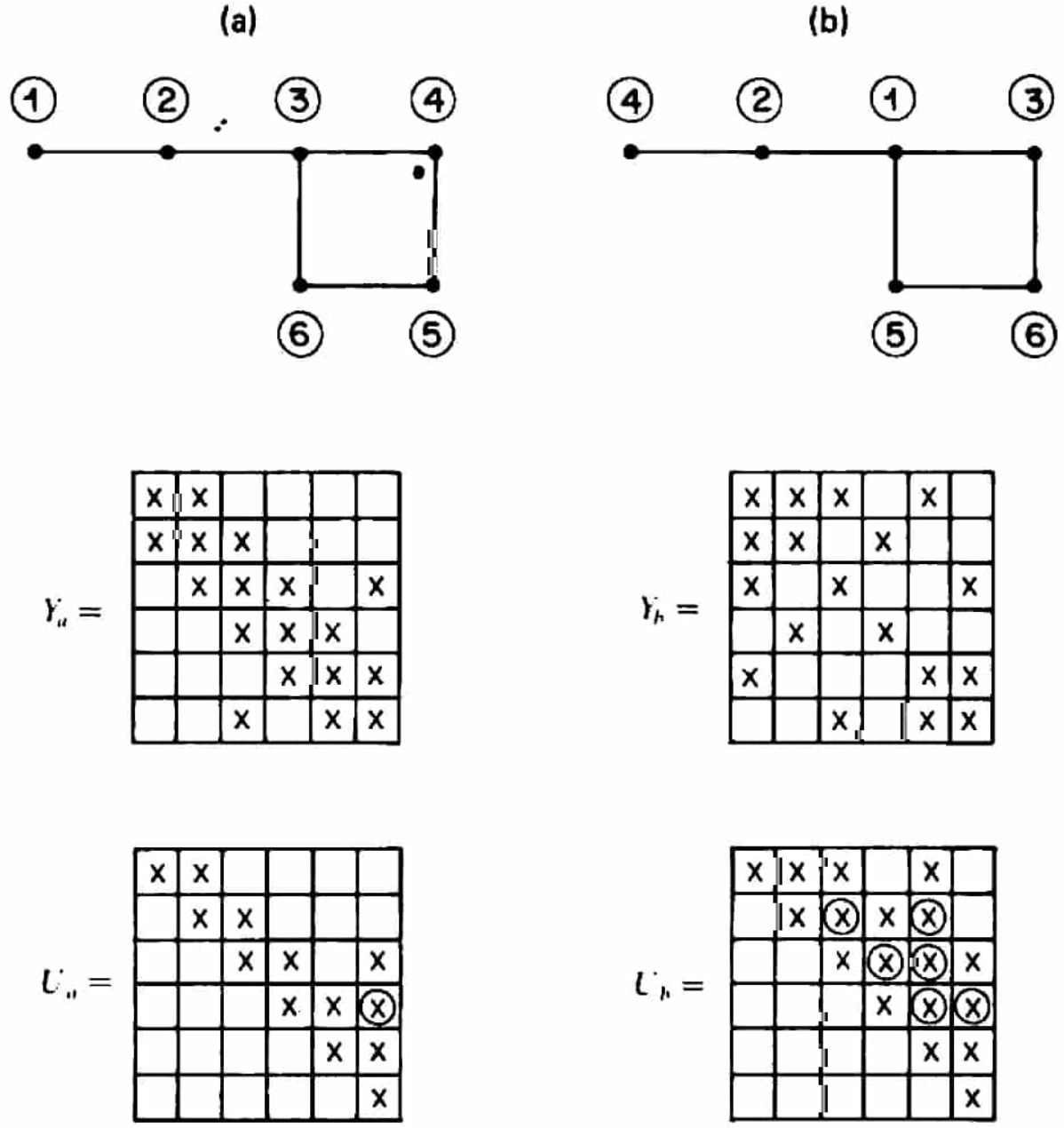


Figura 3.8 – Efeito da numeração dos nós sobre a esparsidade da matriz U.
⊗ elementos novos

A seguir são apresentados, em ordem crescente de complexidade, três possíveis esquemas de ordenação. O Esquema A é o mais simples e também o que fornece resultados mais pobres, apesar de ser bem melhor que uma numeração aleatória. O Esquema B apresenta melhorias consideráveis em relação ao Esquema A, sem apresentar um acréscimo significativo do custo computacional. Já o Esquema C, que é o melhor dos três, tem um custo que, em geral, não justifica as eventuais melhorias na ordenação.

Esquema A

A ordenação é feita segundo o número de ligações de cada nó da rede inicial.

Esquema B

A ordenação é feita segundo o número de ligações de cada nó da rede reduzida (rede existente após a eliminação dos nós precedentes), ou seja, a cada passo do processo de redução escolhe-se para ser eliminado em seguida o nó da rede reduzida com o menor número de ligações.

Esquema C

A cada passo é escolhido para ser eliminado o nó da rede reduzida que, se eliminado, introduzir o número mínimo de novas ligações na rede resultante.

Problemas

3.1. Considerar o sistema algébrico de terceira ordem dado a seguir:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Determinar os fatores *LDU* da matriz dos coeficientes.
b) Determinar x_1, x_2 e x_3 utilizando o procedimento esquematizado nas Tabs. 3.1 e 3.2, da Sec. 3.5, deste capítulo.

3.2. Determinar as admitâncias e as injeções de corrente da rede reduzida obtida pela eliminação dos nós 1 e 2 da rede representada na Fig. 3.4, utilizando o método da eliminação de Gauss (*ver a Fig.* 3.7, *na qual está ilustrado o processo de eliminação de um nó*).

3.3. Determinar os fatores *LDU* para a matriz admitância nodal da rede representada na Fig. 3.7a.

Capítulo 4

ANÁLISE DE ALTERAÇÕES EM REDES DE TRANSMISSÃO

São estudados neste capitulo alguns métodos de análise de alterações em redes de transmissão de energia elétrica provocadas, por exemplo, pela adição ou pela remoção de linhas e transformadores. Os métodos aqui apresentados são aplicáveis tanto na análise de contingências (perda de uma ou mais linhas/transformadores) como nos estudos do planejamento da expansão de redes de transmissão, situações em que são necessários métodos rápidos e eficientes de se avaliar o efeito da remoção/adição de componentes do sistema.

4.1. *Alterações na matriz admitância nodal*

Nesta seção, será visto como a alteração da admitância de um ou mais ramos de uma rede elétrica afeta a matriz admitância nodal da rede. Além da própria matriz admitância nodal, os resultados obtidos neste capítulo são aplicáveis também a outras matrizes com estruturas semelhantes à da matriz Y, como é o caso, por exemplo, da matriz B' do fluxo de carga CC.

4.1.1. *Alterações simples*

Considere-se uma rede com n nós (excluído o nó de referência) cuja matriz admitância nodal é $Y^0(n \times n)$. Seja Δy_{km} a variação introduzida na admitância do ramo $k-m$ dessa rede. A nova matriz admitância nodal passa a ser:

$$Y = Y^0 + \Delta Y \tag{4.1}$$

sendo

$$\Delta Y = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & m \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \ldots + \Delta y_{km} \ldots & - \Delta y_{km} \ldots \\ \vdots & \vdots \\ \ldots - \Delta y_{km} \ldots & + \Delta y_{km} \ldots \\ \vdots & \vdots \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ k \\ \\ m \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{4.2}$$

A matriz ΔY tem uma estrutura muito particular, o que torna possivel uma decomposição do tipo

$$\Delta Y = \Delta y_{km}\, \underline{e}_{km}\, \underline{e}'_{km} \tag{4.3}$$

em que $\underline{e}_{km}$ é um vetor de dimensão m, constituido de zeros, com excepção dos elementos correspondentes aos nós k e m que valem, respectivamente, $+1$ e -1:

$$\underline{e}'_{km} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & m \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \ldots + 1 \ldots & - 1 \ldots \end{array}\right] \end{array} \tag{4.4}$$

Note-se que, se um dos nós terminais k ou m for o nó de referência, então o elemento correspondente não aparecerá no vetor $\underline{e}_{km}$, da mesma forma que a coluna e a linha correspondentes não aparecem na matriz Y.

Considere-se como exemplo a rede representada na Fig. 4.1. No caso da retirada da admitância $y_{2,5}$, tem-se:

$$k = 2; \quad m = 5; \quad \Delta y_{2,5} = -y_{2,5}$$

$$\underline{e}'_{2,5} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

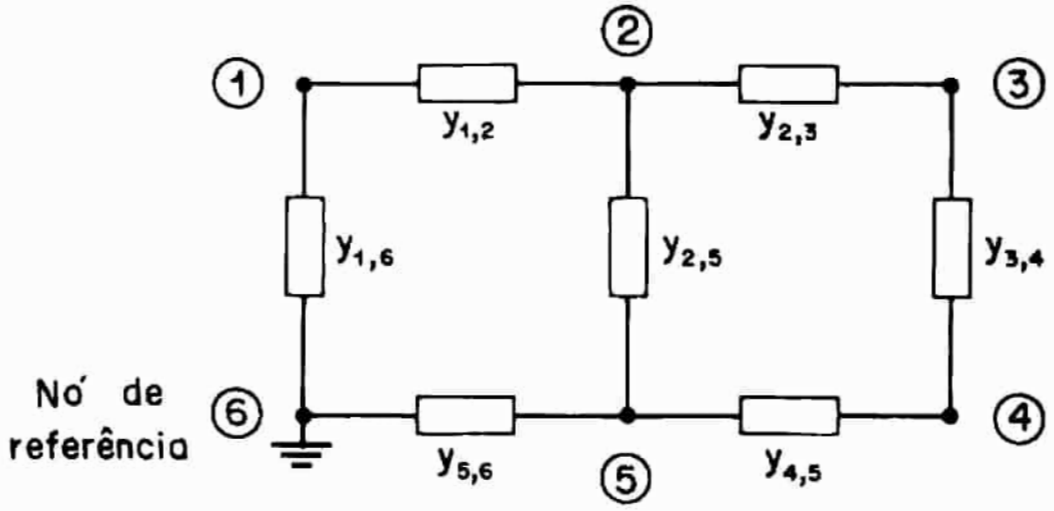


Figura 4.1 – Rede-exemplo de seis nós

$$\Delta Y = -\, y_{2,5}\, \underline{e}_{2,5}\, \underline{e}'_{2,5} =$$

0	0	0	0	0
0	$-\, y_{2,5}$	0	0	$+\, y_{2,5}$
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	$+\, y_{2,5}$	0	0	$-\, y_{2,5}$

Para a mesma rede, no caso da retirada da admitância $y_{5,6}$ (lembre-se de que o nó 6 é o nó de referência), tem-se:

$$k = 5; \quad m = 6; \quad \Delta y_{5,6} = -\, y_{5,6}$$

$$\underline{e}'_{5,6} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta Y = -\, y_{5,6}\, \underline{e}_{5,6}\, \underline{e}'_{5,6} =$$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-\, y_{5,6}$

4.1.2. *Alterações múltiplas*

A expressão (4.3) obtida anteriormente para a situação de alteração simples pode ser generalizada para o caso de alterações múltiplas, ou seja, quando ocorrem variações simultâneas nas admitâncias de vários ramos da rede (este é o caso, por exemplo, de contingências múltiplas, que envolvem o desligamento simultâneo de várias linhas/transformadores).

Considere-se inicialmente o caso de alterações duplas. Sejam $\Delta y_{k_1 m_1}$ e $\Delta y_{k_2 m_2}$ as variações introduzidas simultaneamente nas admitâncias dos ramos $k_1 - m_1$ e $k_2 - m_2$. A matriz ΔY tem a seguinte forma neste caso:

$$\Delta Y = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k_1 & k_2 & m_1 & m_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} + \Delta y_{k_1 m_1} \cdots & & - \Delta y_{k_1 m_1} & \\ \vdots & & \vdots & \\ & + \Delta y_{k_2 m_2} \cdots & & - \Delta y_{k_2 m_2} \\ & \vdots & & \vdots \\ - \Delta y_{k_1 m_1} \cdots & & + \Delta y_{k_1 m_1} \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ & - \Delta y_{k_2 m_2} \cdots & & + \Delta y_{k_2 m_2} \end{array}\right] \begin{array}{c} k_1 \\ \\ k_2 \\ \\ m_1 \\ \\ m_2 \end{array} \end{array} \tag{4.5}$$

Analogamente ao que ocorre no caso unidimensional, esta expressão pode ser colocada na forma:

$$\Delta Y = M \Delta y M^t \tag{4.6}$$

em que M e Δy são as matrizes:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \underline{e}_{k_1 m_1} & \underline{e}_{k_2 m_2} \end{array}\right] ; \quad \Delta y = \left[\begin{array}{c|c} \Delta y_{k_1 m_1} & 0 \\ \hline 0 & \Delta y_{k_2 m_2} \end{array}\right]$$

sendo $\underline{e}_{k_1 m_1}$ e $\underline{e}_{k_2 m_2}$ vetores do mesmo tipo que o vetor $\underline{e}_{km}$ dado em (4.4).

A expressão (4.6) vale também em situações mais gerais, nas quais ocorrem simultaneamente variações $\Delta y_{k_i m_i} (i = 1, \ell)$. Neste caso, as matrizes M e Δy, e o vetor $\underline{e}_{k_i m_i}$ passam a ser:

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{e}_{k_1 m_1} & \underline{e}_{k_2 m_2} & \cdots & \underline{e}_{k_\ell m_\ell} \\ \hline \end{array} \quad (n \times \ell) \tag{4.7}$$

$$\Delta y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \Delta y_{k_1 m_1} & & & \\ \hline & \Delta y_{k_2 m_2} & & \\ \hline & & \cdots & \\ \hline & & & \Delta y_{k_\ell m_\ell} \\ \hline \end{array} \tag{4.8}$$

$$\underline{e}'_{k_i m_i} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k_i & m_i \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \ldots + 1 \ldots - 1 \ldots \\ \hline \end{array} \end{array} \tag{4.9}$$

Note-se que, se ℓ for o número de ramos da rede, a matriz M dada em (4.7) será a matriz de incidência ramo-nó. Neste caso, se $\Delta y_{k_i m_i} = y_{k_i m_i}$ (sendo $y_{k_i m_i}$ a admitância total do ramo $k_i - m_i$), então a matriz ΔY dada pela expressão (4.6) será a própria matriz admitância nodal Y. Note-se ainda que uma alteração múltipla dada pela expressão (4.6) pode ser encarada como a superposição de ℓ alterações simples, ou seja,

$$\Delta Y = M \Delta y M^t = \sum_{i=1}^{\ell} \Delta y_{k_i m_i} \underline{e}_{k_i m_i} \underline{e}'_{k_i m_i} \tag{4.10}$$

Considere-se novamente o exemplo da Fig. 4.1: no caso da remoção simultânea das admitâncias $y_{2,5}$ e $y_{5,6}$ tem-se:

$$k_1 = 2;\ m_1 = 5;\ \Delta y_{2,5} = -y_{2,5}$$

$$\underline{e}'_{2,5} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$k_2 = 5;\ m_2 = 6;\ \Delta y_{5,6} = -\ y_{5,6}$$

$$\underline{e}^t_{5,6} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta Y = -\ y_{2,5}\,\underline{e}_{2,5}\,\underline{e}^t_{2,5} - y_{5,6}\,\underline{e}_{5,6}\,\underline{e}^t_{5,6} =$$

0	0	0	0	0
0	$-\ y_{2,5}$	0	0	$+\ y_{2,5}$
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	$+\ y_{2,5}$	0	0	$-\ y_{2,5} - y_{5,6}$

4.2. *Análise de sensibilidade*

A análise de sensibilidade apresentada nesta seção visa a determinar como a variação na admitância de um ramo de uma rede modelada por $\underline{I} = Y\underline{E}$ afeta a distribuição de correntes.

Considere-se um sistema que no caso básico (situação inicial) é descrito pelo modelo linear:

$$\underline{I} = Y^0\underline{E}^0 \tag{4.11}$$

Se forem introduzidas alterações nas admitâncias de um ou mais ramos da rede, as tensões nodais sofrerão modificações. Considerando-se as injeções de corrente inalteradas, na nova situação tem-se

$$\underline{I} = Y\underline{E} \tag{4.12}$$

$$Y = Y^0 + \Delta Y = Y^0 + M\Delta yM^t \tag{4.13}$$

$$\underline{E} = \underline{E}^0 + \Delta\underline{E} \tag{4.14}$$

Substituindo-se (4.13) e (4.14) em (4.12), e considerando-se (4.11), obtém-se:

$$Y^0\Delta\underline{E} + \Delta Y\underline{E}^0 + \Delta Y\Delta\underline{E} = 0 \tag{4.15}$$

Se o termo de segunda ordem $\Delta Y \Delta \underline{E}$ for desprezado, a correção no estado da rede $\Delta \underline{E}$ poderá ser determinada pela resolução do sistema linear $Y^0 \Delta \underline{E} = -\Delta Y \underline{E}^0$, em que o vetor independente $\Delta Y \underline{E}^0$ é conhecido e a matriz dos coeficientes Y^0 é a mesma do caso básico. Este procedimento, no entanto, é muito impreciso e só apresenta resultados satisfatórios para variações Δy_{km} muito pequenas em relação à admitância equivalente entre os nós k e m (*ver a expressão* (1.45) que fornece a impedância equivalente entre os nós k e m). Tendo-se em vista as deficiências da aproximação $Y^0 \Delta \underline{E} = -\Delta Y \underline{E}^0$, a análise de sensibilidade desenvolvida a seguir considera a expressão (4.15) sem se desprezar o termo de segunda ordem $\Delta Y \Delta \underline{E}$. Com isso, a relação entre ΔY e $\Delta \underline{E}$ fica sendo do tipo não-linear.

4.2.1. *Alterações simples*

Considere-se inicialmente o caso em que se introduz uma variação Δy_{km} na admitância do ramo $k-m$ da rede:

$$\Delta y = \Delta y_{km} \tag{4.16}$$

$$M = \underline{e}_{km} \tag{4.17}$$

$$\Delta Y = \Delta y_{km} \underline{e}_{km} \underline{e}_{km}^t \tag{4.18}$$

Neste caso, a Eq. (4.15) pode ser colocada na forma:

$$\Delta \underline{E} = -\Delta y_{km} Z^0 \underline{e}_{km} \underline{e}_{km}^t (\underline{E}^0 + \Delta \underline{E}) \tag{4.19}$$

em que

$$Z^0 = (Y^0)^{-1} \tag{4.20}$$

$$\underline{e}_{km}^t (\underline{E}^0 + \Delta \underline{E}) = E_{km}^0 + \Delta E_{km} \tag{4.21}$$

sendo $E_{km}^0 = E_k^0 - E_m^0$ e $\Delta E_{km} = \Delta E_k - \Delta E_m$. Introduzindo-se (4.20) e (4.21) em (4.19), obtém-se:

$$\Delta \underline{E} = -\Delta y_{km} (E_{km}^0 + \Delta E_{km}) Z^0 \underline{e}_{km} \tag{4.22}$$

Nesta expressão, $\Delta \underline{E}$ está colocado em função de ΔE_{km}, que precisa ser calculado para que $\Delta \underline{E}$ fique inteiramente determinado (dependendo apenas do estado e da matriz impedância referentes ao caso-básico). Isso pode ser feito premultiplicando-se (4.22) por $\underline{e}_{km}^t$, como está indicado a seguir:

$$\underline{e}'_{km}\Delta\underline{E} = \Delta E_{km} = -\Delta y_{km}(E^0_{km} + \Delta E_{km})\,\underline{e}'_{km}\,Z^0\,\underline{e}_{km} \tag{4.23}$$

$$\Delta E_{km} = -\frac{\Delta y_{km}\,E^0_{km}}{\Delta y_{km} + y^{eq}_{km}} \tag{4.24}$$

sendo

$$(y^{eq}_{km})^{-1} = z^{eq}_{km} = \underline{e}'_{km}\,Z^0\,\underline{e}_{km} = Z^0_{kk} + Z^0_{mm} - 2\,Z^0_{km} \tag{4.25}$$

em que y^{eq}_{km} e z^{eq}_{km} são, respectivamente, a admitância e a reatância equivalentes entre os nós k e m, conforme é visto no Cap. 1 [expressão (1.45)]. Substituindo-se (4.24) em (4.22), obtém-se a expressão desejada de $\Delta\underline{E}$:

$$\Delta\underline{E} = \frac{-\Delta y_{km}\,E^0_{km}}{1 + \Delta y_{km}/y^{eq}_{km}}\,\underline{w}_{km} \tag{4.26}$$

em que

$$\underline{w}_{km} = Z^0\,\underline{e}_{km} \tag{4.27}$$

Se a matriz Z^0 for disponível, o vetor $\underline{w}_{km}$ poderá ser obtido diretamente por:

$$\underline{w}_{km} = \underline{z}^0_k - \underline{z}^0_m \tag{4.28}$$

sendo $\underline{z}^0_k$ e $\underline{z}^0_m$, respectivamente, as colunas da matriz Z^0 correspondentes aos nós k e m da rede. Se em vez de Y^0 forem conhecidos os fatores triangulares L, D e U da matriz Y^0, o vetor $\underline{w}_{km}$ poderá ser obtido resolvendo-se o sistema linear:

$$Y^0\underline{w}_{km} = \underline{e}_{km} \tag{4.29}$$

Uma vez determinado o vetor $\underline{w}_{km}$, pode-se determinar a reatância equivalente z^{eq}_{km} que é dada por:

$$z^{eq}_{km} = w^k_{km} - w^m_{km} \tag{4.30}$$

em que w^k_{km} e w^m_{km} são, respectivamente, as componentes k e m do vetor $\underline{w}_{km}$.

A correção $\Delta\underline{E}$ no vetor de estado dada pela expressão (4.26) pode ser utilizada para se determinar o novo estado da rede ($\underline{E} = \underline{E}^0 + \Delta\underline{E}$). Note-se que o estado assim obtido é exato em relação ao modelo linear, ou seja, é o mesmo resultado que seria obtido resolvendo-se o sistema $\underline{I} = (Y^0 + \Delta Y)\underline{E}$. A vantagem de se utilizar a expressão (4.26) no cálculo do novo estado é que não se torna necessária a inversão ou a fatoração triangular da nova matriz de coeficientes $Y = Y^0 + \Delta Y$.

A expressão (4.26) mostra que a variação no estado $\Delta\underline{E}$ é uma função não-linear da variação Δy_{km} na admitância do ramo $k-m$. No entanto, se Δy_{km} tiver magnitude muito menor que y_{km}^{eq}, então $\Delta\underline{E}$ poderá ser aproximado por

$$\Delta\underline{E} = -\Delta y_{km}\, E_{km}^{0}\, \underline{w}_{km} \tag{4.31}$$

que é uma relação linear entre $\Delta\underline{E}$ e Δy_{km}. Esta aproximação corresponde a se desprezar o termo de segunda ordem $\Delta Y \Delta\underline{E}$ na expressão (4.15).

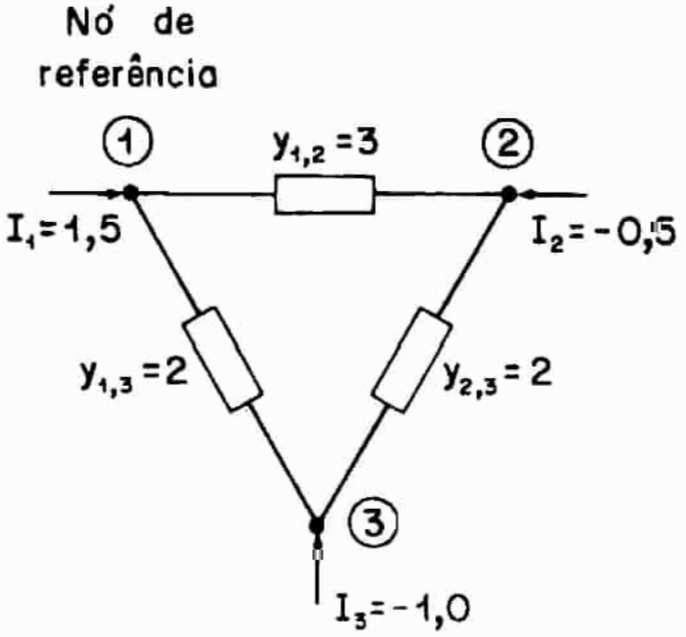


Figura 4.2 – Rede-exemplo de três nós

Considere-se, a título de ilustração, a rede de três nós representada na Fig. 4.2. (Note que esta rede pode ser encarada como o Modelo CC do sistema de três barras representado na Fig. 2.3.) O estado da rede na situação inicial é dado por:

$$\underline{E}^{0} = (Y^{0})^{-1}\underline{I} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -3/8 \end{bmatrix}$$

ou seja, $E_2^0 = -\,{}^{1}_{4}$ e $E_3^0 = -\,{}^{3}_{8}$ (lembrar que $E_1^0 = 0$). Para a situação de remoção da admitância $y_{2,3}$ (contingência da linha 2-3) tem-se:

$$\underline{E} = Y^{-1}\underline{I} = (Y^0 + \Delta Y)^{-1}\underline{I} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\,{}^{1}_{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}_{3} & 0 \\ 0 & {}^{1}_{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\,{}^{1}_{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,{}^{1}_{6} \\ -\,{}^{1}_{2} \end{bmatrix}$$

ou seja, $E_2 = -\,{}^{1}_{6}$ e $E_3 = -\,{}^{1}_{2}$. O estado na nova situação pode ser calculado também utilizando-se a análise de sensibilidade desenvolvida anteriormente. Neste exemplo, a expressão (4.26) assume a forma:

$$\Delta\underline{E} = -\frac{\Delta y_{2,3}\, E^0_{2,3}}{1 + \Delta y_{2,3}\, z^{eq}_{2,3}}\, \underline{w}_{2,3}$$

sendo

$$\Delta\underline{E} = \begin{bmatrix} \Delta E_2 \\ \Delta E_3 \end{bmatrix};\ \Delta y_{2,3} = -\,y_{2,3} = -\,2;\ E^0_{2,3} = E^0_2 - E^0_3 = {}^{1}_{8}$$

$$Z^0 = \begin{matrix} & 2 & 3 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} {}^{1}_{4} & {}^{1}_{8} \\ {}^{1}_{8} & {}^{5}_{16} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix};\ \underline{w}_{2,3} = \underline{z}^0_2 - \underline{z}^0_3 = \begin{bmatrix} {}^{1}_{8} \\ -\,{}^{3}_{16} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$z^{eq}_{2,3} = w^2_{2,3} - w^3_{2,3} = {}^{5}_{16}$$

Substituindo-se os valores de $\Delta y_{2,3}$, $E^0_{2,3}$, $\underline{w}_{2,3}$ e $z^{eq}_{2,3}$ na expressão de $\Delta\underline{E}$, obtém-se:

$$\Delta\underline{E} = \begin{bmatrix} {}^{1}_{12} \\ -\,{}^{1}_{8} \end{bmatrix};\ \underline{E} = \underline{E}^0 + \Delta\underline{E} = \begin{bmatrix} -\,{}^{1}_{6} \\ -\,{}^{1}_{2} \end{bmatrix}$$

Os fluxos de corrente no caso básico são:

$$I^0_{1,2} = y_{1,2} E^0_{1,2} = 0{,}75;\ I^0_{1,3} = y_{1,3} E^0_{1,3} = 0{,}75;\ I^0_{2,3} = y_{2,3} E^0_{2,3} = 0{,}25$$

Após a retirada do elemento 2 – 3 os fluxos passam a ser:

$$I_{1,2} = y_{1,2} E_{1,2} = 0{,}5;\ I_{1,3} = y_{1,3} E_{1,3} = 1{,}0;\ I_{2,3} = 0{,}0$$

4.2.2. *Alterações múltiplas*

A análise de sensibilidade aplicada anteriormente ao caso de alterações simples (retirada ou adição de um elemento da rede) pode ser estendida para situações em que ocorrem alterações múltiplas (retirada ou adição de vários elementos simultaneamente). Sejam $\Delta y_{k_i m_i}$ as variações introduzidas nas admitâncias dos ramos $k_i - m_i$ $(i = 1, \ell)$. Neste caso, a expressão (4.15) pode ser colocada na forma:

$$\Delta \underline{E} = - Z^0 M \Delta y M^t (\underline{E}^0 + \Delta \underline{E}) \tag{4.32}$$

sendo as matrizes M e Δy dadas, respectivamente, pelas expressões (4.7) e (4.8). O produto $M^t \underline{E}^0$ é um vetor de dimensão m cujas componentes são as diferenças de tensões $E^0_{k_i m_i}$ dos ramos $k_i - m_i$ no caso básico; analogamente, o produto $M^t \Delta \underline{E}$ é um vetor de mesma dimensão cujas componentes são as variações $\Delta E_{k_i m_i}$ verificadas nas diferenças de tensões dos ramos onde ocorrem alterações de admitâncias.

A determinação de $\Delta \underline{E}$ exige o cálculo prévio do vetor $M^t \Delta \underline{E}$, o que pode ser feito premultiplicando-se a expressão (4.32) por M^t conforme se indica a seguir:

$$M^t \Delta \underline{E} = - M^t Z^0 M \Delta y (M^t \underline{E}^0 + M^t \Delta \underline{E}) \tag{4.33}$$

$$M^t \Delta \underline{E} = - (\Pi_\ell + M^t Z^0 M \Delta y)^{-1} M^t Z^0 M \Delta y M^t \underline{E}^0 \tag{4.34}$$

em que Π_ℓ é a matriz identidade de ordem ℓ. Substituindo-se (4.34) em (4.32), obtém-se:

$$\Delta \underline{E} = - Z^0 M (\Delta y^{-1} + M^t Z^0 M)^{-1} M^t \underline{E}^0 \tag{4.35}$$

Note-se que a expressão (4.26), deduzida para alterações simples, é um caso particular da expressão (4.35), o que pode ser verificado fazendo-se: $M = \underline{e}_{km}$; $M^t \underline{E}^0 = E^0_{km}$; $Z^0 M = \underline{w}_{km}$; e $\Delta y = \Delta y_{km}$. Note-se também que $Z^0 M$ é uma matriz de dimensão $n \times \ell$, cujas ℓ colunas são vetores $\underline{w}_{k_i m_i}$ que obedecem à relação $\underline{w}_{k_i m_i} = Z^0 \underline{e}_{k_i m_i}$ (analogamente ao que ocorre com o vetor $\underline{w}_{km}$ do caso unidimensional). A matriz quadrada

$(\Delta y^{-1} + M'Z^0M)$ tem dimensão $\ell \times \ell$ e pode ser montada sem dificuldades desde que Z^0M seja previamente calculado. Nas situações práticas de maior interesse, como, por exemplo, na análise de contingências múltiplas, ℓ em geral é pequeno ($\leqslant 5$), o que permite a inversão da matriz $(\Delta y^{-1} + M'Z^0M)$ sem grandes dificuldades.

4.3. *Alterações na matriz impedância nodal*

No início deste capítulo (Sec. 4.1), foi visto como a alteração da admitância do ramo $k-\ell$ da rede afeta a matriz Y ($Y = Y^0 + \Delta Y = Y^0 + \Delta y_{km}\underline{e}_{km}\underline{e}'_{km}$). Essas alterações são facilmente introduzidas na matriz original Y^0 pois só os elementos (k, k), (m, m), (k, m) e (m, k) são afetados (lembrar que, se k for o nó de referência, então só o elemento (m, m) aparecerá na matriz e, portanto, estará sujeito a alterações). Alterações múltiplas ($\Delta y_{k_i m_i}$: $i = 1, \ell$) podem ser consideradas como a superposição de ℓ alterações simples ($Y = Y^0 + \Delta Y = M\Delta y M' = \sum_{i=1}^{\ell} \Delta y_{k_i m_i} \underline{e}_{k_i m_i} \underline{e}'_{k_i m_i}$), cada uma delas afetando um ou quatro elementos da matriz Y, dependendo de o nó-referência estar ou não envolvido. A simplicidade com que são introduzidas alterações na matriz Y^0 contrasta com o que ocorre com sua inversa, a matriz Z^0: enquanto a alteração da admitância de um ramo modifica um ou quatro elementos da matriz Y^0, a matriz Z^0 em geral fica inteiramente modificada (todos os elementos assumem novos valores).

Considere-se uma rede que, na situação inicial, é representada pelo modelo linear

$$\underline{E}^0 = Z^0\underline{I} \tag{4.36}$$

Após a introdução de alterações nas admitâncias de um ou mais ramos da rede, o modelo linear assumirá a forma

$$\underline{E} = \underline{E}^0 + \Delta\underline{E} = Z^0\underline{I} + \Delta\underline{E} = Z\underline{I} \tag{4.37}$$

Por essa expressão pode-se determinar a nova matriz Z a partir da matriz inicial Z^0, como será mostrado a seguir.

4.3.1. *Alterações simples*

Introduzindo-se (4.26) em (4.37), obtém-se

$$Z\underline{I} = Z^0\underline{I} - \frac{Z^0\,\underline{e}_{km}\,E^0_{km}}{\Delta y_{km}^{-1} + z^{eq}_{km}} \tag{4.38}$$

Considerando-se que

$$E^0_{km} = \underline{e}^t_{km}\underline{E}^0 = \underline{e}^t_{km}Z^0\underline{I} \tag{4.39}$$

pode-se reescrever (4.38) na forma

$$Z\underline{I} = Z^0\underline{I} - \frac{Z^0\underline{e}_{km}\underline{e}^t_{km}Z^0}{\Delta y^{-1}_{km} + \underline{z}^{eq}_{km}}\underline{I} \tag{4.40}$$

Este resultado vale para qualquer vetor $\underline{I}$, e isso só é possivel se

$$Z = Z^0 - \frac{Z^0\underline{e}_{km}\underline{e}^t_{km}Z^0}{\Delta y^{-1}_{km} + z^{eq}_{km}} \tag{4.41}$$

Finalmente, considerando-se que $Z^0\underline{e}_{km} = \underline{w}_k = \underline{z}^0_k - \underline{z}^0_m$, obtém-se

$$Z = Z^0 + \Delta Z = Z^0 - \frac{(\underline{z}_k{}^0 - \underline{z}^0_m)(\underline{z}_k{}^0 - \underline{z}^0_m)^t}{\Delta y^{-1}_{km} + \underline{z}^{eq}_{km}} \tag{4.42}$$

Note-se que a correção ΔZ, que deve ser adicionada à matriz Z^0 para se obter a nova matriz Z, pode ser obtida a partir das informações contidas nas colunas correspondentes aos nós k e m da matriz Z^0 (lembrar que $z^{eq}_{km} = Z_{kk} + Z_{mm} - 2Z_{km}$).

Considere-se novamente a rede de três nós representada na Fig. 4.2. A matriz Z^0 dessa rede, conforme foi visto anteriormente, é:

$$Z^0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline {}^1/_4 & {}^1/_8 \\ \hline {}^1/_8 & {}^5/_{16} \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array}$$

A matriz Z correspondente à situação na qual a admitância $y_{2.3}$ é removida pode ser obtida pela expressão (4.42) que, neste caso particular, assume a forma

$$Z = Z^0 + \Delta Z = Z^0 - \frac{(\underline{z}^0_2 - \underline{z}^0_3)(\underline{z}^0_2 - \underline{z}^0_3)^t}{\Delta y^{-1}_{2.3} + \underline{z}^{eq}_{2.3}}$$

sendo

$$\underline{z}^0_2 = \begin{array}{|c|} \hline {}^1/_4 \\ \hline {}^1/_8 \\ \hline \end{array} \; ; \; \underline{z}^0_3 = \begin{array}{|c|} \hline {}^1/_8 \\ \hline {}^5/_{16} \\ \hline \end{array} \; ; \; \Delta y_{2.3} = -y_{2.3} = -2$$

$$\underline{z}^{eq}_{2.3} = Z^0_{2.2} + Z^0_{3.3} - 2Z^0_{2.3} = {}^5/_{16}$$

Substituindo-se $\underline{z}_2^0$, $\underline{z}_3^0$, $\Delta y_{2,3}$ e $z_{2,3}^{eq}$ na expressão de Z, obtém-se

$$Z = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{bmatrix} - \frac{1}{(-1/2 + 5/16)} \begin{bmatrix} 1/8 \\ -3/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 & -3/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4.3.2. *Alterações múltiplas*

A expressão da matriz de correções ΔZ no caso multidimensional pode ser obtida seguindo-se o mesmo procedimento adotado para alterações simples. Introduzindo-se (4.35) em (4.37), obtém-se

$$Z\underline{I} = Z^0\underline{I} - Z^0M(\Delta y^{-1} + M^tZ^0M)^{-1}M^t\underline{E}^0 \qquad (4.43)$$

Substituindo-se

$$M^t\underline{E}^0 = M^tZ^0\underline{I} \qquad (4.44)$$

em (4.43) e, considerando-se que a expressão resultante é válida para qualquer $\underline{I}$, chega-se a

$$Z = Z^0 + \Delta Z = Z^0 - Z^0M(\Delta y^{-1} + M^tZ^0M)^{-1}M^tZ^0 \qquad (4.45)$$

Da mesma forma que no caso unidimensional, a matriz de correção ΔZ pode ser inteiramente determinada a partir da matriz original Z^0.

4.4. *Teorema da Compensação* [4]

O resultado da análise de sensibilidade [expressão (4.26)] deduzido anteriormente por meio de manipulações algébricas pode também ser obtido utilizando-se uma propriedade física das redes elétricas conhecida como Teorema da Compensação, segundo o qual a alteração na admitância de um ramo da rede tem o mesmo efeito que a ligação de uma fonte de corrente de intensidade conveniente entre os nós terminais da admitância. Ou seja, o efeito da alteração de uma admitância da rede pode ser compensado por uma fonte de corrente apropriada. Apesar de o resultado final já ser conhecido, a utilização do Teorema da Compensação poderá trazer um entendimento físico mais apropriado sobre o significado da análise de sensibilidade estudada anteriormente. Mesmo sendo uma propriedade geral, só será estudada aqui a aplicação do Teorema da Compensação a situações nas quais ocorrem alterações simples (um ramo por vez).

Considere-se uma rede modelada pela equação linear $\underline{I} = Y\underline{E}$. A idéia básica do Teorema da Compensação está ilustrada na Fig. 4.3. Na parte *a* da figura está representada a rede na situação inicial, cujo modelo é $\underline{I} = Y^0\underline{E}^0$; aparece também nesta parte da figura um ramo genérico da rede com admitância y_{km}. Na parte *b* está representada a rede após a introdução de um acréscimo Δy_{km} na admitância do ramo $k-m$; o modelo do sistema passa a ser $\underline{I} = (Y^0 + \Delta Y)\underline{E}$, sendo $\underline{E}$ o novo estado da rede. Na parte *c*, a admitância Δy_{km} foi desconectada da rede e seu efeito é representado pelas injeções extras $\pm \Delta y_{km} E_{km}$: nesta situação, o modelo do sistema é $\underline{I} + \underline{I}^c = Y^0\underline{E}$, em que $\underline{I}^c = \Delta y_{km} E_{km}\, \underline{e}_{km}$ e $\underline{E}$ é o mesmo estado da parte *b*.

Imagine-se que se deseja calcular o novo estado da rede ($\underline{E}$), ou seja, o estado existente após a introdução da alteração Δy_{km}. Isto pode ser feito considerando-se o modelo da Fig. 4.3*b*, o que exigiria a resolução do sistema $\underline{I} = (Y^0 + \Delta Y)\underline{E}$ pela inversão ou pela fatoração triangular da matriz $Y^0 + \Delta Y$. Uma maneira alternativa de se calcular o vetor $\underline{E}$ consiste em se trabalhar com o modelo da Fig. 4.3*c*, resolvendo-se o sistema $\underline{I} + \underline{I}^c = Y^0\underline{E}$. A vantagem deste segundo procedimento é que se trabalha com a matriz admitância do caso básico Y^0, não sendo necessário portanto sua reinversão ou refatoração; é necessária, no entanto, a determinação prévia de $\underline{I}^c$, o que será feito a seguir com a ajuda do circuito equivalente que aparece na Fig. 4.4.

O vetor $\underline{I}^c$ é composto de zeros com exceção dos elementos k e m que valem, respectivamente, $-\Delta y_{km} E_{km}$ e $+\Delta y_{km} E_{km}$. Assim sendo, para se conhecer $\underline{I}^c$ basta que se determine E_{km}, o que pode ser feito utilizando-se o circuito equivalente representado na Fig. 4.4 *a*, no qual a rede foi reduzida à admitância equivalente y_{km}^{eq}: as injeções equivalentes $\pm I_k^{eq}$ são calculadas de tal forma que a diferença de tensão E_{km}^0 seja a mesma na rede e no circuito equivalente (respectivamente, Figs. 4.3*a* e 4.4*a*). Na parte *b* da Fig. 4.4 está representada a adição da admitância Δy_{km}: na parte *c*, o efeito de Δy_{km} é compensado pelo par de injeções $\pm \Delta y_{km} E_{km}$. Na parte *a* da Fig. 4.4 tem-se

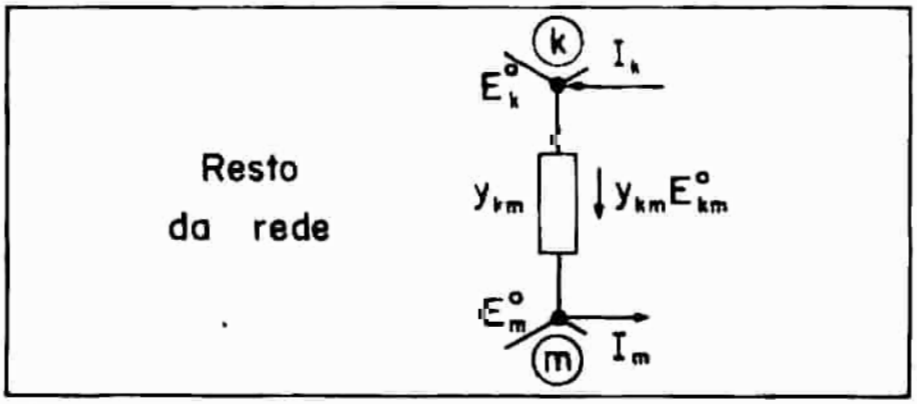
$$I_k^{eq} = y_{km}^{eq} E_{km}^0 \tag{4.46}$$

Da parte *c* da mesma figura tem-se

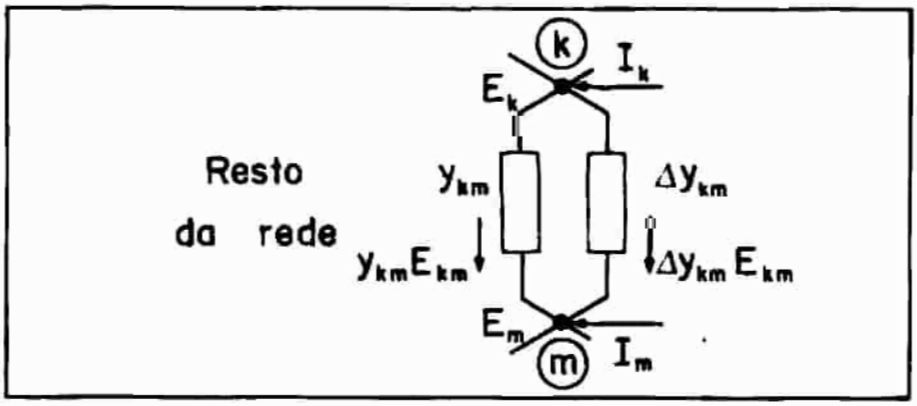
$$I_k^{eq} - \Delta y_{km} E_{km} = y_{km}^{eq} E_{km} \tag{4.47}$$

Substituindo-se (4.47) em (4.46), obtém-se

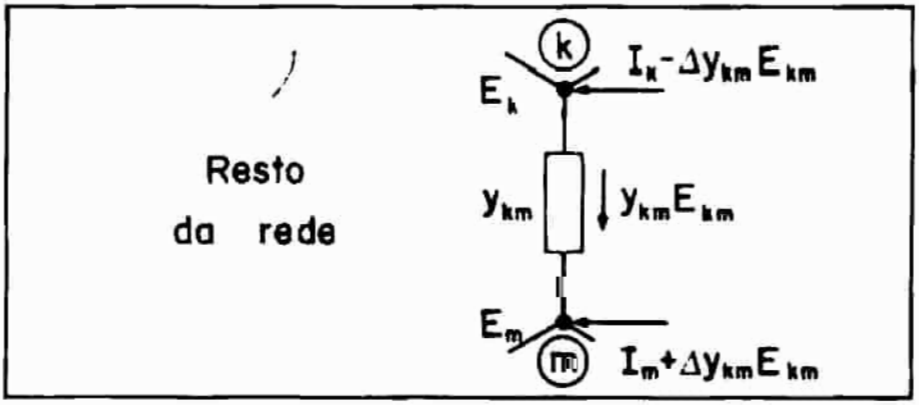
$$E_{km} = -\frac{y_{km}^{eq} E_{km}^0}{\Delta y_{km} + y_{km}^{eq}} \tag{4.48}$$



a) Situação inicial: $\underline{I} = Y^0 \underline{E}^0$



b) Situação final: $\underline{I} = (Y^0 + \Delta Y)\underline{E}$



c) Situação final compensada: $\underline{I} + \underline{I}^c = Y^0 \underline{E}$

Figura 4.3 – Teorema da Compensação

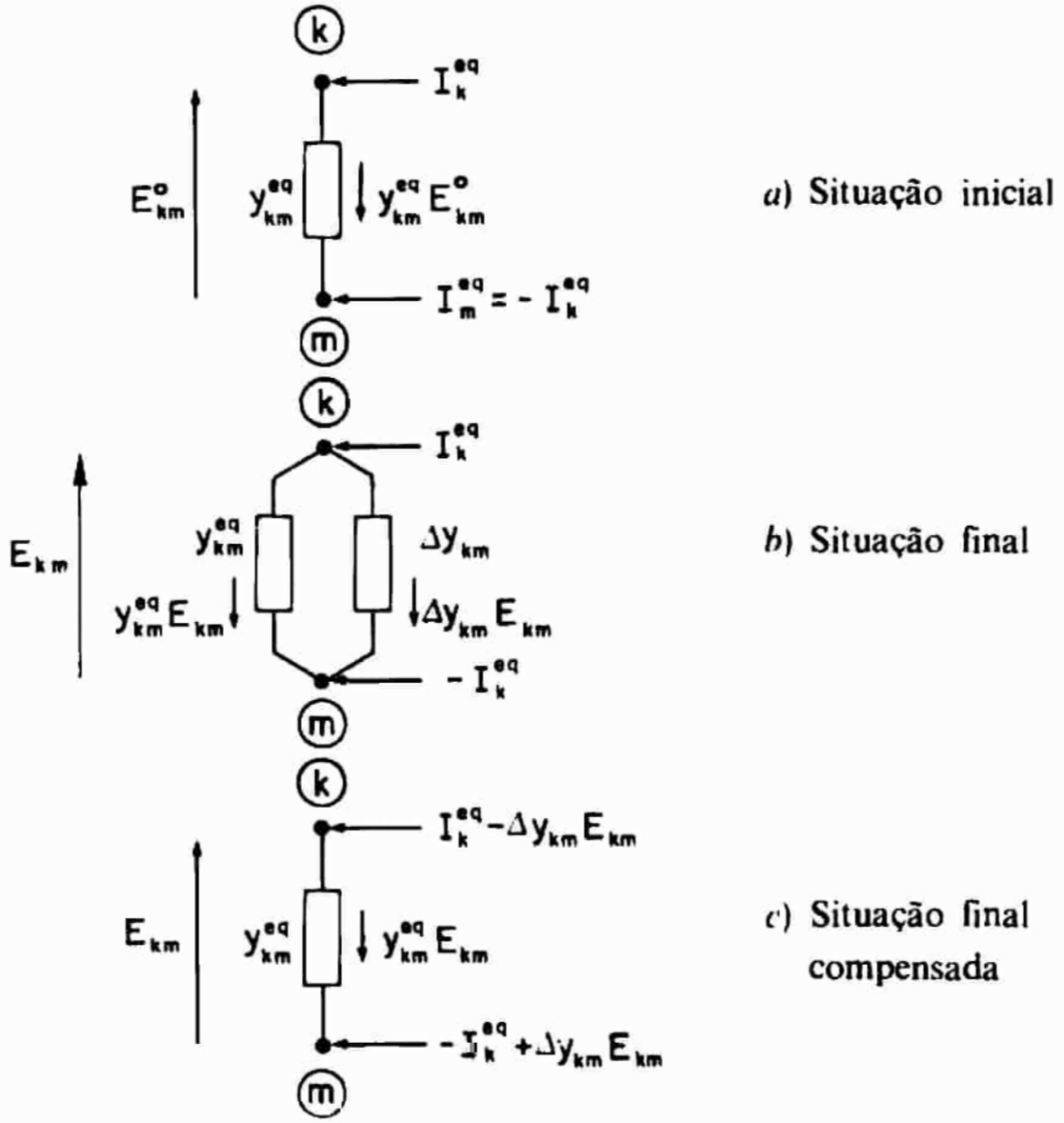


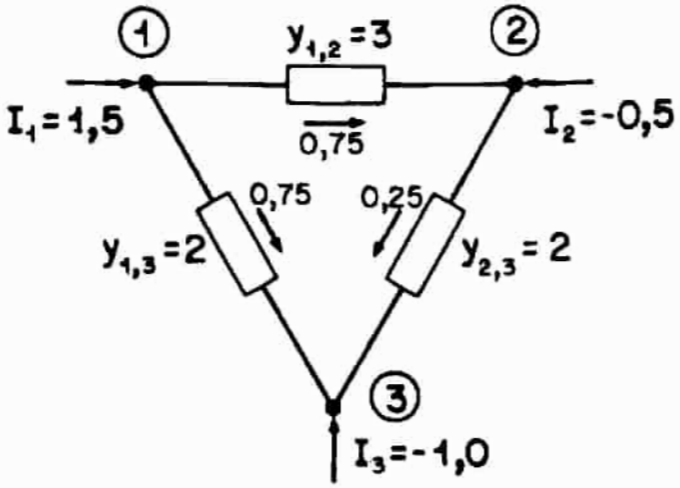
Figura 4.4 – Teorema da Compensação – rede representada por um circuito equivalente

Finalmente, as componentes não-nulas de $\underline{I}^c$ são dadas por

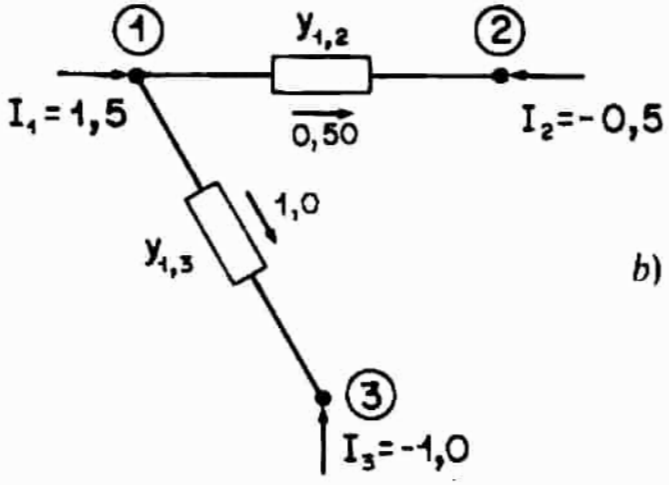
$$- I_k^c = I_m^c = \frac{E_{km}^0}{\Delta z_{km}^{-1} + z_{km}^{eq}} \tag{4.49}$$

O vetor $\underline{I}^c$ pode então ser colocado na forma

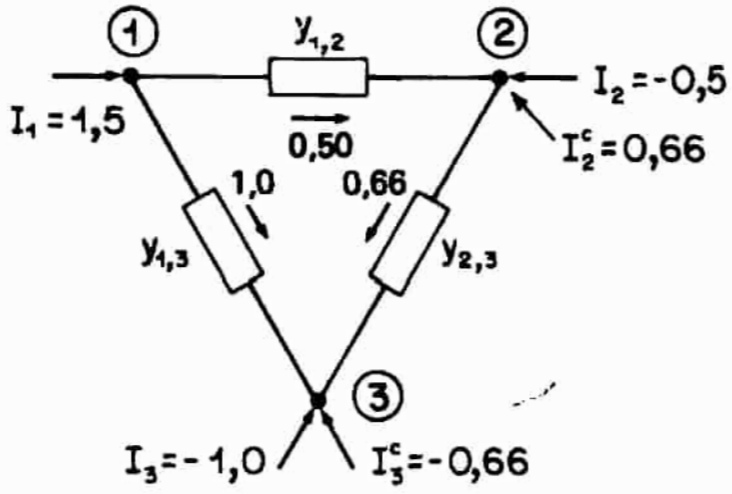
$$\underline{I}^c = - \frac{E_{km}^0}{\Delta z_{km}^{-1} + z_{km}^{eq}} \underline{e}_{km} \tag{4.50}$$



a) Situação inicial



b) Remoção da admitância $y_{2,3}$



c) Compensação

Figura 4.5 – Exemplo de compensação

O estado final da rede é dado por $\underline{E} = Z^0(\underline{I} + \underline{I}^c)$. A variação no estado produzido pela adição da admitância Δy_{km} é

$$\Delta \underline{E} = Z^0 \underline{I}^c = -\frac{\Delta y_{km} E_{km}^0}{1 + \Delta y_{km}/y_{km}^{eq}} Z^0 \underline{e}_{km} \qquad (4.51)$$

que, como era de esperar, é o mesmo resultado dado pela expressão (4.26).

Considere-se novamente o exemplo da Fig. 4.2. A Fig. 4.5 mostra a rede completa (*a*); a remoção da admitância $y_{2.3}$(*b*); e a simulação da remoção pelas injeções compensadoras (*c*). As injeções podem ser determinadas a partir da expressão (4.50), que neste exemplo particular assume a forma

$$\underline{I}^c = - \frac{E^0_{2.3}}{\Delta y^{-1}_{2.3} + z^{eq}_{2.3}} \underline{e}_{2.3}$$

em que

$$E^0_{2.3} = 0{,}125;\ \Delta y_{2.3} = -y_{2.3} = -2$$

$$\underline{I}^c = \begin{array}{|c|} \hline I^c_2 \\ \hline I^c_3 \\ \hline \end{array} \ ;\ \underline{e}_{2.3} = \begin{array}{|c|l} \hline +1 & 2 \\ \hline -1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$z^{eq}_{2.3} = \underline{e}'_{2.3}\, Z^0\, \underline{e}_{2.3} = Z^0_{2.2} + Z^0_{3.3} - 2Z^0_{2.3} = 5/16$$

Substituindo-se $E^0_{2.3}$, $\Delta y_{2.3}$, $z^{eq}_{2.3}$ e $\underline{e}_{2.3}$ na expressão de $\underline{I}^c$, obtém-se

$$I^c_2 = 0{,}66;\ I^c_3 = -0{,}66$$

Note-se que, na Fig. 4.5*a*, o fluxo de corrente na admitância $y_{2.3}$ tem a mesma magnitude que as injeções compensadoras, ou seja, a admitância $y_{2.3}$ só é percorrida pelas injeções compensadoras e, para o resto do sistema, tudo se passa como se a admitância tivesse sido removida.

4.5. *Lema de inversão de matrizes* [5]

O efeito da alteração da admitância de um ramo de uma rede de transmissão (modificações na matriz Y) foi estudado anteriormente por dois procedimentos: análise de sensibilidade (Sec. 4.2) e Teorema da Compensação (Sec. 4.4). Uma terceira alternativa para se estudar este problema se baseia no **lema de inversão de matrizes**, que será deduzido a seguir por uma generalização do procedimento utilizado na análise de sensibilidade.

Considere o sistema linear

$$A^0 \underline{x}^0 = \underline{b} \tag{4.52}$$

em que A é uma matriz $(n \times n)$, $\underline{x}^0$ é um vetor $(n \times 1)$ e $\underline{b}$ é um vetor $(n \times 1)$.

Seja ΔA uma variação introduzida na matriz de coeficientes A; o novo sistema passa a ser

$$(A^0 + \Delta A)(\underline{x}^0 + \Delta \underline{x}) = \underline{b} \tag{4.53}$$

Considere-se ainda que a matriz ΔA possa ser colocada na forma

$$\Delta A = CDF \tag{4.54}$$

sendo C uma matriz $(n \times \ell)$, D uma matriz $(\ell \times \ell)$ e F uma matriz $(\ell \times n)$, ou seja:

$$\underset{(n \times n)}{\Delta A} = \underset{(n \times \ell)}{C} \cdot \underset{(\ell \times \ell)}{D} \cdot \underset{(\ell \times n)}{F} \tag{4.55}$$

Seguindo-se o mesmo procedimento adotado na análise de sensibilidade, pode-se colocar o vetor $\Delta \underline{x}$ na forma

$$\Delta \underline{x} = -(A^0)^{-1} CDF(\underline{x}^0 + \Delta \underline{x}) \tag{4.56}$$

Premultiplicando-se esta expressão por F e isolando-se o vetor $F\Delta \underline{x}(\ell \times 1)$, vem:

$$F\Delta \underline{x} = -[\mathrm{II}_\ell + F(A^0)^{-1} CD]^{-1} F(A^0)^{-1} CDF\, \underline{x}^0 \tag{4.57}$$

Substituindo-se (4.57) em (4.56), pode-se determinar o vetor de correção $\Delta \underline{x}$:

$$\Delta \underline{x} = -(A^0)^{-1} CD[\mathrm{II}_\ell + F(A^0)^{-1} CD]^{-1} F\, \underline{x}^0 \tag{4.58}$$

Considerando-se que

$$\underline{x} = \underline{x}^0 + \Delta \underline{x} \tag{4.59}$$

isto é

$$A^{-1}\underline{b} = (A^0)^{-1}\underline{b} + \Delta \underline{x} \tag{4.60}$$

e substituindo-se $\Delta \underline{x}$ em (4.60), obtém-se

$$A^{-1}\underline{b} = (A^0)^{-1}\underline{b} - (A^0)^{-1} CD[\mathrm{II}_\ell + F(A^0)^{-1} CD]^{-1} F(A^0)^{-1}\underline{b} \tag{4.61}$$

Como este resultado independe do vetor $\underline{b}$, conclui-se que

$$A^{-1} = (A^0)^{-1} - (A^0)^{-1}C\left[D^{-1} + F(A^0)^{-1}C\right]^{-1}F(A^0)^{-1} \tag{4.62}$$

Note-se que as expressões (4.58) e (4.62) são generalizações de (4.35) e (4.45), respectivamente. Um método possível de ser adotado para o estudo da adição/remoção de circuitos em uma rede consistiria em partir das expressões (4.58) e (4.62) e particularizá-las para o caso de alterações simples e múltiplas. A expressão (4.35), por exemplo, que dá a variação $\Delta\underline{E}$ no vetor de estado da rede, pode ser obtida a partir de (4.58) fazendo-se: $\Delta\underline{x} = \Delta\underline{E}$; $A^0 = Y^0$; $(A^0)^{-1} = Z^0$; $C = M$; $D = \Delta y$; $F = C^t = M^t$; e $\underline{x}^0 = \underline{E}^0$.

Problemas

4.1. Considerar a remoção da ligação 1-2 do sistema representado na Fig. 4.2 (ou seja, $\Delta y_{1.2} = -y_{1.2} = -3$).

a) Determinar o estado da rede resultante, resolvendo-se a equação $Y\underline{E} = \underline{I}$, sendo $Y = Y^0 + \Delta Y$.
b) Determinar o estado $\underline{E}$ da rede resultante utilizando-se, agora, a Eq. (4.26).
c) Calcular a matriz Z da rede resultante a partir da matriz Z^0 da rede original [Eq. (4.41)].

4.2. Para a mesma situação descrita no Prob. 4.1:

a) Calcular as injeções compensadoras. A introdução dessas injeções na rede (nós 1 e 2) tem o mesmo efeito que a remoção da ligação 1-2 (*ver a Fig.* 4.3, *sobre o teorema da compensação*).
b) Determinar o estado $\underline{E}$ da rede da Fig. 4.2 pela resolução da equação $Y^0\underline{E} = \underline{I} + \underline{I}^c$, em que aparece o vetor das injeções compensadoras $\underline{I}^c$: comparar com o resultado obtido no Prob. 4.1.

4.3. Deduzir as expressões (4.26) e (4.41) a partir do lema de inversão de matrizes dado pela Eq. (4.62).

Capítulo 5

FLUXO DE CARGA NÃO-LINEAR: ALGORITMOS BÁSICOS

No Cap. 1, foi apresentada uma formulação genérica sobre fluxo de carga, incluindo-se a dedução das equações básicas do problema, a descrição do modo de operação dos principais componentes da rede de transmissão e a definição dos tipos mais comuns de barras (PQ, PV e $V\theta$). Foi também mencionado nesse capítulo que, além das equações básicas, existe um conjunto adicional de inequações/equações que representam as restrições de operação da rede e a atuação de dispositivos de controle, que também devem ser obedecidas pela solução do problema. No Cap. 2, foi estudado um método linear (fluxo de carga CC) que permite o cálculo aproximado da distribuição dos fluxos de potência ativa na rede; nesse método, são ignoradas as equações referentes à parte reativa do problema, não são consideradas as restrições de operação e a atuação dos dispositivos de controle. Neste capítulo, o problema será retomado em sua forma mais geral, conforme a formulação não-linear apresentada no Cap. 1, e serão discutidos os métodos que apresentam maior interesse prático: o método de Newton e os métodos desacoplados.

5.1. *Formulação do problema básico*

As equações básicas do fluxo de carga foram deduzidas no Cap. 1 pela aplicação das leis de Kirchhoff, resultando:

$$P_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) \tag{5.1}$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \tag{5.2}$$

para $k = 1, \mathrm{NB}$; sendo NB o número de barras da rede. Os métodos computacionais para o cálculo do fluxo de carga em geral são constituídos de duas partes: a primeira, também chamada de algoritmo básico, trata da resolução por métodos iterativos de um sistema de equações

algébricas do tipo (5.1)-(5.2); a outra parte do processo de resolução do problema considera a atuação dos dispositivos de controle e da representação dos limites de operação do sistema. As duas partes do problema podem ser resolvidas alternadamente, intercalando-se a solução das equações básicas com a representação dos controles e limites de operação. Outra possibilidade consiste em alterarem-se as equações (5.1)-(5.2) para incluir a representação dos dispositivos de controle; nesse caso as duas partes do problema são resolvidas simultaneamente (ver o Cap. 6).

Considere-se inicialmente um problema no qual são dados P_k e Q_k para as barras PQ; P_k e V_k para as barras PV; e V_k e θ_k para a barra $V\theta$ (referência angular); e pede-se para calcular V_k e θ_k nas barras PQ; θ_k e Q_k nas barras PV; e P_k e Q_k na barra de referência. Uma vez resolvido este problema, será conhecido o estado (V_k, θ_k) para todas as barras da rede ($k = 1, \mathrm{NB}$), o que torna possível o cálculo de outras variáveis de interesse, como, por exemplo, os fluxos de potência nas linhas de transmissão, transformadores, etc. Sejam: NPQ e NPV, respectivamente, o número de barras PQ e PV da rede (note-se que, inicialmente, será considerada a existência de apenas uma barra $V\theta$). O problema formulado anteriormente pode ser decomposto em dois subsistemas de equações algébricas, conforme se indica a seguir:

Subsistema 1 (dimensão: $2\,NPQ + NPV$)

Neste subproblema são dados P_k e Q_k nas barras PQ, e P_k e V_k nas barras PV; pretende-se calcular V_k e θ_k nas barras PQ, e θ_k nas barras PV. Ou seja, trata-se de um sistema de $2\,NPQ + NPV$ equações algébricas não-lineares com o mesmo número de incógnitas, ou seja:

$$P_k^{esp} - V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) = 0 \qquad (5.3)$$

para barras PQ e PV

$$Q_k^{esp} - V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) = 0 \qquad (5.4)$$

para barras PQ

Subsistema 2 (dimensão: $NPV + 2$)

Após resolvido o Subsistema 1, e portanto já sendo conhecidos V_k e θ_k para todas as barras, deseja-se calcular P_k e Q_k na barra de referência, e Q_k nas barras PV. Trata-se de um sistema com $NPV + 2$ equações algébricas não-lineares com o mesmo número de incógnitas, no qual todas as incógnitas aparecem de forma explícita, o que torna trivial o

processo de resolução. Note-se que o mesmo não ocorre com o Subsistema 1, no qual as incógnitas são implícitas, o que exige um processo iterativo de resolução conforme será mostrado mais adiante.

$$P_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) \tag{5.5}$$

para barra de referência

$$Q_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \tag{5.6}$$

para barras PV e de referência

No processo de resolução apresentado anteriormente não foram consideradas as restrições de operação e a atuação de dispositivos de controle que correspondem a um conjunto adicional de inequações/equações. Um exemplo dessas restrições de operação são os limites (máximo e mínimo) na geração de potência reativa das barras *PV*; se durante o processo iterativo um desses limites for violado, Q_k será fixado no valor extremo correspondente e a barra *PV* transformar-se-á em *PQ*; isto significa que a magnitude da tensão da barra *PV* não pôde ser mantida no valor especificado; nesse caso, faz-se $Q_k^{esp} = Q_k^{lim}$ e a equação correspondente do Subsistema 2 passa para o Subsistema 1; eventualmente, em uma iteração seguinte, a barra poderá voltar a ser do tipo *PV*. Uma discussão mais detalhada sobre limites de operação e dispositivos de controle será apresentada mais adiante.

As incógnitas do Subsistema 1 podem ser agrupadas no vetor $\underline{x}$ dado a seguir:

$$\underline{x} = \begin{array}{|c|}\hline \underline{\theta} \\ \hline \underline{V} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \} \; NPV + NPQ \\ \} \; NPQ \end{array} \tag{5.7}$$

em que $\underline{\theta}$ é o vetor dos ângulos das tensões das barras *PQ* e *PV*, e $\underline{V}$ é o vetor das magnitudes das tensões das barras *PQ*. As expressões (5.3) e (5.4), que formam o Subsistema 1, podem ser reescritas do seguinte modo:

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k(\underline{V}, \underline{\theta}) = 0 \tag{5.8}$$

para barras PQ e PV

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k(\underline{V}, \underline{\theta}) = 0 \tag{5.9}$$

para barras PQ

As funções ΔP_k e ΔQ_k podem ser colocadas na forma vetorial

$$\Delta \underline{P} = \underline{P}^{esp} - \underline{P}(\underline{V}, \underline{\theta}) \tag{5.10}$$

$$\Delta \underline{Q} = \underline{Q}^{esp} - \underline{Q}(\underline{V}, \underline{\theta}) \tag{5.11}$$

em que $\underline{P}$ é o vetor das injeções de potência ativa nas barras PQ e PV, e $\underline{Q}$, o das injeções de potência reativa nas barras PQ.

Seja $\underline{g}(\underline{x})$ a função vetorial dada por

$$\underline{g}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \Delta \underline{P} \\ \Delta \underline{Q} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} NPQ + NPV \\ \} NPQ \end{matrix} \tag{5.12}$$

Por meio dessa função, o Subsistema 1, dado pelas expressões (5.8)-(5.9), pode ser colocado na forma

$$\underline{g}(\underline{x}) = 0 \tag{5.13}$$

Este sistema de equações algébricas não-lineares pode ser resolvido por um número muito grande de métodos, sendo que os mais eficientes são os métodos de Newton e o desacoplado rápido (ambos serão estudados neste capítulo). Na Sec. 5.2, será apresentada uma revisão sumária sobre a utilização do método de Newton na resolução de sistemas de equações algébricas; em uma seção subseqüente (Sec. 5.3), o método será aplicado à resolução do Subsistema 1; na Sec. 5.4, os métodos desacoplados serão obtidos a partir do método de Newton.

5.2. *Resolução de sistemas algébricos pelo método de Newton*

Considere-se inicialmente um sistema unidimensional do tipo

$$g(x) = 0 \tag{5.14}$$

em que $g(x)$ e x são escalares. Pretende-se determinar o valor de x para o qual a função $g(x)$ se anula. Em termos geométricos, como mostra a Fig. 5.1, a solução da Eq. (5.14) corresponde ao ponto em que a curva corta o eixo x. A resolução desse problema pelo método de Newton segue os seguintes passos:

i) Fazer $\nu = 0$ e escolher uma solução inicial $x = x^{(\nu)} = x^{(0)}$.

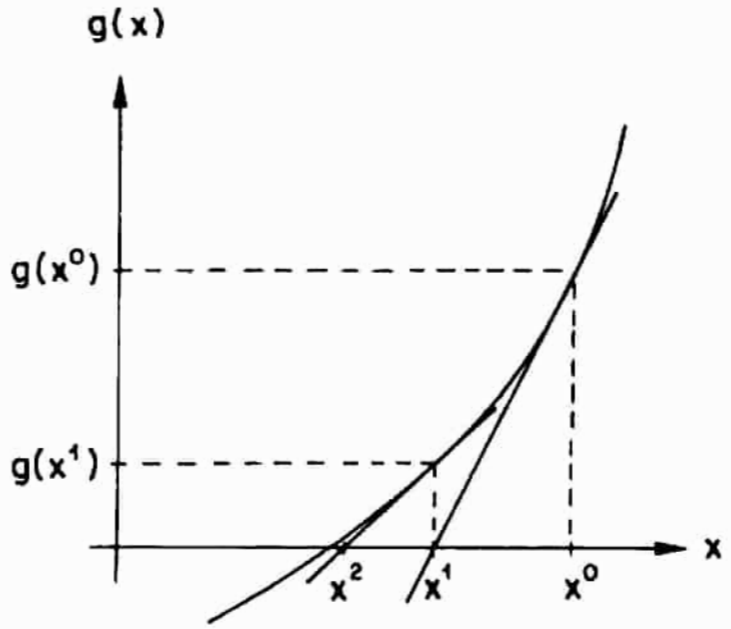


Figura 5.1 – Método de Newton

ii) Calcular o valor da função $g(x)$ no ponto $x = x^{\nu}$.

iii) Comparar o valor calculado $g(x^{\nu})$ com a tolerância especificada ε: se $|g(x^{\nu})| \leqslant \varepsilon$, então $x = x^{\nu}$ será a solução procurada dentro da faixa de tolerância $\pm\varepsilon$; se $|g(x^{\nu})| > \varepsilon$, o algoritmo deverá prosseguir.

iv) Linearizar (*ver a Fig.* 5.1) a função $g(x)$ em torno do ponto $(x^{\nu}; g(x^{\nu}))$ por intermédio da série de Taylor:

$$g(x^{\nu} + \Delta x^{\nu}) \cong g(x^{\nu}) + g'(x^{\nu})\Delta x^{\nu} \tag{5.15}$$

sendo $g'(x) = dg/dx$. Este passo se resume, de fato, ao cálculo da derivada $g'(x^{\nu})$.

v) Resolver o problema linearizado, ou seja, encontrar Δx tal que:

$$g(x^{\nu}) + g'(x^{\nu})\Delta x^{\nu} = 0 \tag{5.16}$$

Isto significa que a nova estimativa de x passa a ser

$$x^{\nu+1} = x^{\nu} + \Delta x^{\nu} \tag{5.17}$$

sendo

$$\Delta x^{\nu} = -\, g(x^{\nu})/g'(x^{\nu}) \tag{5.18}$$

vi) Fazer $\nu + 1 \rightarrow \nu$ e voltar para o passo *ii*.

A variante do método de Newton ilustrada na Fig. 5.2 é obtida considerando-se a derivada constante, isto é, no passo (*iv*) do algoritmo

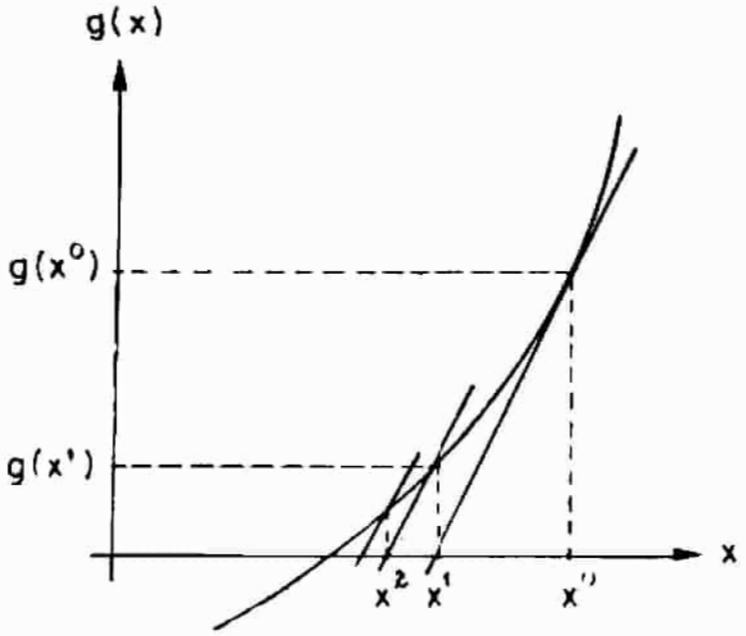


Figura 5.2 – Método de Newton com derivada constante (Von Mises)

faz-se $g'(x^{\nu}) = g'(x^0)$. Nesta versão, o número de iterações, para uma dada tolerância de convergência, em geral é maior que no método original, mas cada uma das iterações se torna mais rápida pois a derivada não precisa ser recalculada a cada passo.

Considere-se agora a resolução do seguinte sistema n-dimensional:

$$\underline{g}(\underline{x}) = 0 \tag{5.19}$$

sendo $\underline{g}(\underline{x})$ uma função vetorial ($n \times 1$) e $\underline{x}$ o vetor das incógnitas ($n \times 1$), ou seja,

$$\underline{g}(\underline{x}) = [(g_1(\underline{x}), g_2(\underline{x}), \ldots, g_n(\underline{x})]' \tag{5.20}$$

$$\underline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]' \tag{5.21}$$

A resolução da Eq. (5.19) segue, basicamente, os mesmos passos do algoritmo apresentado anteriormente para o caso unidimensional. A principal diferença está no passo (*iv*), no qual, agora, aparece a matriz jacobiana. A linearização da função vetorial $\underline{g}(\underline{x})$ para $\underline{x} = \underline{x}^{\nu}$ é dada pelos dois primeiros termos da série de Taylor

$$\underline{g}(\underline{x}^{\nu} + \Delta\underline{x}^{\nu}) \cong \underline{g}(\underline{x}^{\nu}) + J(\underline{x}^{\nu})\Delta\underline{x}^{\nu} \tag{5.22}$$

sendo a matriz jacobiana J dada por

$$J = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

O vetor de correção $\Delta \underline{x}$ é calculado impondo-se que

$$\underline{g}(\underline{x}^{\nu}) + J(\underline{x}^{\nu})\Delta \underline{x}^{\nu} = 0 \tag{5.24}$$

que é maneira linearizada de se resolver o problema $\underline{g}(\underline{x}^{\nu} + \Delta \underline{x}) \doteq 0$. No caso particular em que, por exemplo, $n = 2$, a Eq. (5.22) assume a forma:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &\cong g_1(x_1^{\nu}, x_2^{\nu}) + \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{\nu} \Delta x_1^{(\nu)} + \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{\nu} \Delta x_2^{(\nu)} \\ g_2(x_1, x_2) &\cong g_2(x_1^{\nu}, x_2^{\nu}) + \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right|_{\nu} \Delta x_1^{(\nu)} + \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_{\nu} \Delta x_2^{(\nu)} \end{aligned} \tag{5.25}$$

O algoritmo para resolução do sistema de equações $\underline{g}(\underline{x}) = 0$ pelo método de Newton é:

i) Fazer $\nu = 0$ e escolher uma solução inicial $\underline{x} = \underline{x}^{(\nu)} = \underline{x}^{(0)}$.

ii) Calcular $\underline{g}(\underline{x}^{\nu})$.

iii) Testar convergência: se $|g_i(\underline{x}^{\nu})| \leqslant \varepsilon$ para $i = 1, n$, o processo convergiu para solução $\underline{x}^{\nu}$, caso contrário, passar para (*iv*).

iv) Calcular matriz jacobiana $J(\underline{x}^{\nu})$.

v) Determinar nova solução $\underline{x}^{(\nu+1)}$:

$$\underline{x}^{\nu+1} = \underline{x}^{\nu} + \Delta \underline{x}^{\nu} \tag{5.26}$$

$$\Delta \underline{x}^{\nu} = -\left[J(\underline{x}^{\nu})\right]^{-1} \underline{g}(\underline{x}^{\nu}) \tag{5.27}$$

vi) Fazer $\nu + 1 \rightarrow \nu$ e voltar para o passo (*ii*).

5.3. *Fluxo de carga pelo método de Newton* [6, 7]

Nesta seção será aplicado o método de Newton para a resolução do Subsistema 1 ($\underline{g}(\underline{x}, \underline{y}) = 0$). O ponto central do processo de resolução consiste em se determinar o vetor de correção $\Delta\underline{x}$, o que exige a resolução do sistema linear dado em (5.24), reescrito a seguir:

$$\underline{g}(\underline{x}^{\nu}) = -J(\underline{x}^{\nu})\Delta\underline{x}^{\nu} \tag{5.28}$$

No caso em que o sistema de equações a ser resolvido é o Subsistema 1, têm-se

$$\underline{g}(\underline{x}^{\nu}) = \begin{bmatrix} \Delta\underline{P}^{\nu} \\ \Delta\underline{Q}^{\nu} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} NPQ + NPV \\ \} NPQ \end{matrix} \tag{5.29}$$

$$\Delta\underline{x}^{\nu} = \begin{bmatrix} \Delta\underline{\theta}^{\nu} \\ \Delta\underline{V}^{\nu} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} NPQ + NPV \\ \} NPQ \end{matrix} \tag{5.30}$$

$$J(\underline{x}^{\nu}) = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ NPQ + NPV \end{matrix} \overbrace{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}}^{(\nu)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\Delta\underline{P})}{\partial\underline{\theta}} & \dfrac{\partial(\Delta\underline{P})}{\partial\underline{V}} \\ \dfrac{\partial(\Delta\underline{Q})}{\partial\underline{\theta}} & \dfrac{\partial(\Delta\underline{Q})}{\partial\underline{V}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} NPQ + NPV \\ \} NPQ \end{matrix} \tag{5.31}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ NPQ + NPV \end{matrix} \overbrace{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}}^{} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ NPQ \end{matrix}$$

Considerando-se as expressões dos vetores $\Delta\underline{P}$ e $\Delta\underline{Q}$ dadas em (5.10) e (5.11), e lembrando-se de que $\underline{P}^{esp}$ e $\underline{Q}^{esp}$ são constantes, a matriz jacobiana (5.31) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$J(\underline{x}^{\nu}) = -\overbrace{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}}^{(\nu)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\underline{P}}{\partial\underline{\theta}} & \dfrac{\partial\underline{P}}{\partial\underline{V}} \\ \dfrac{\partial\underline{Q}}{\partial\underline{\theta}} & \dfrac{\partial\underline{Q}}{\partial\underline{V}} \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

As submatrizes que compõem a matriz jacobiana J, dada em (5.32), são geralmente representadas por

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{\theta}}; \quad N = \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{V}} \\ M &= \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{\theta}}; \quad L = \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{V}} \end{aligned} \tag{5.33}$$

Utilizando-se as expressões (5.32) e (5.33), a Eq. (5.28) pode, finalmente, ser colocada na forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{P}^{\nu} \\ \Delta \underline{Q}^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}^{(\nu)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{\theta}^{\nu} \\ \Delta \underline{V}^{\nu} \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

As componentes das submatrizes jacobianas H, N, M e L são dadas por:

$$H \begin{cases} H_{km} = \partial P_k / \partial \theta_m = V_k V_m (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ H_{kk} = \partial P_k / \partial \theta_k = - V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \end{cases} \tag{5.35}$$

$$N \begin{cases} N_{km} = \partial P_k / \partial V_m = V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) \\ N_{kk} = \partial P_k / \partial V_k = V_k G_{kk} + \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) \end{cases} \tag{5.36}$$

$$M \begin{cases} M_{km} = \partial Q_k / \partial \theta_m = - V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) \\ M_{kk} = \partial Q_k / \partial \theta_k = - V_k^2 G_{kk} + V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) \end{cases} \tag{5.37}$$

$$L \begin{cases} L_{km} = \partial Q_k / \partial V_m = V_k (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ L_{kk} = \partial Q_k / \partial V_k = - V_k B_{kk} + \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \end{cases} \tag{5.38}$$

Os elementos H_{kk}, N_{kk}, M_{kk} e L_{kk} podem ser colocados em função das injeções de potência ativa e reativa na barra k, conforme pode ser deduzido das expressões (5.35) a (5.38):

$$H_{kk} = -Q_k - V_k^2 B_{kk} \tag{5.39}$$

$$N_{kk} = V_k^{-1}(P_k + V_k^2 G_{kk}) \tag{5.40}$$

$$M_{kk} = P_k - V_k^2 G_{kk} \tag{5.41}$$

$$L_{kk} = V_k^{-1}(Q_k - V_k^2 B_{kk}) \tag{5.42}$$

A partir das expressões (5.35) a (5.38) pode-se concluir que, se $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ for nulo, então os elementos H_{km}, N_{km}, M_{km} e L_{km} também serão nulos. Isto implica que as matrizes H, N, M e L têm as mesmas características de esparsidade que a matriz Y.

O método de Newton aplicado à resolução do Subsistema 1 é descrito a seguir:

i) Fazer $\nu = 0$ e escolher os valores iniciais dos ângulos das tensões das barras PQ e PV ($\theta = \theta^0$), e as magnitudes das tensões das barras PQ ($V = V^0$).

ii) Calcular $P_k(V^\nu, \theta^\nu)$ para as barras PQ e PV, e $Q_k(V^\nu, \theta^\nu)$ para as barras PQ, e determinar os resíduos ΔP_k^ν e ΔQ_k^ν.

iii) Testar convergência: se $\text{Max}\{|\Delta P_k^\nu|\} \leqslant \varepsilon_P$ e $\text{Max}\{|\Delta Q_k^\nu|\} \leqslant \varepsilon_Q$, o processo iterativo convergiu para a solução (V^ν, θ^ν); caso contrário passar para *(iv)*.

iv) Calcular a matriz jacobiana

$$J(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) = \begin{array}{|c|c|} \hline H(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) & N(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) \\ \hline M(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) & L(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) \\ \hline \end{array} \tag{5.43}$$

v) Determinar a nova solução $(\underline{V}^{\nu+1}, \underline{\theta}^{\nu+1})$:

$$\underline{\theta}^{\nu+1} = \underline{\theta}^\nu + \Delta\underline{\theta}^\nu \tag{5.44}$$

$$\underline{V}^{\nu+1} = \underline{V}^\nu + \Delta\underline{V}^\nu \tag{5.45}$$

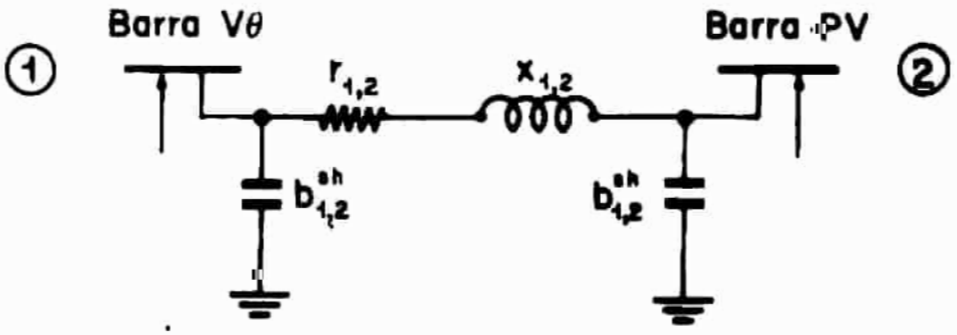
sendo $\Delta\theta^\nu$ e ΔV^ν determinados resolvendo-se o sistema linear

$$\begin{array}{|c|} \hline \Delta\underline{P}(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) \\ \hline \Delta\underline{Q}(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline H(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) & N(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) \\ \hline M(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) & L(\underline{V}^\nu, \underline{\theta}^\nu) \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \Delta\underline{\theta}^\nu \\ \hline \Delta\underline{V}^\nu \\ \hline \end{array} \tag{5.46}$$

vi) Fazer $\nu + 1 \rightarrow \nu$ e voltar para o passo (*ii*).

Considere-se, a título de ilustração, o sistema de duas barras representado na Fig. 5.3. Nesse exemplo, a resolução do Subsistema 1 se resume à determinação do ângulo θ, pois V_1, θ_1 e V_2 são dados. Uma síntese do processo iterativo resultante da aplicação do método de Newton é dada na tabela a seguir.

Iteração	Variáveis		
	θ_2^ν	ΔP_2^ν	$\Delta\theta_2^\nu$
$\nu = 0$	0,000	−0,400	−0,416
$\nu = 1$	−0,416	−0,028	−0,036
$\nu = 2$	−0,451	−0,0002	—



Dados das barras (*pu*)

Barra	Tipo	P	Q	V	θ
1	$V\theta$	—	—	1,0	0,0
2	PV	−0,40	—	1,0	—

Dados das linhas (*pu*)

Linha	r	x	b^{sh}
1-2	0,2	1,0	0,02

Tolerância de convergência em ΔP:

$\varepsilon = 0{,}003$

Figura 5.3 – Dados do fluxo de carga de uma rede-exemplo de duas barras

Os cálculos efetuados na obtenção dessa tabela estão detalhados a seguir. A impedância-série e a admitância-série da linha 1-2 são, respectivamente,

$$z_{1,2} = r_{1,2} + jx_{1,2} = 0{,}2 + j1{,}0$$

$$y_{1,2} = g_{1,2} + jb_{1,2} = (z_{1,2})^{-1} = 0{,}1923 - j0{,}9615$$

A admitância-shunt da linha é:

$$y^{sh}_{1,2} = jb^{sh}_{1,2} = j\,0{,}020$$

A matriz admitância nodal é:

$$Y = G + jB = \begin{array}{|c|c|}\hline 0{,}1923 - j0{,}9415 & -0{,}1923 + j0{,}9615 \\ \hline -0{,}1923 + j0{,}9615 & 0{,}1923 - j0{,}9415 \\ \hline \end{array}$$

sendo as matrizes G e B dadas, respectivamente, por:

$$G = \begin{array}{|r|r|}\hline 0{,}1923 & -0{,}1923 \\ \hline -0{,}1923 & 0{,}1923 \\ \hline \end{array} \qquad B = \begin{array}{|r|r|}\hline -0{,}9415 & 0{,}9615 \\ \hline 0{,}9615 & -0{,}9415 \\ \hline \end{array}$$

A expressão da potência ativa na barra 2 é:

$$P_2 = V_2^2 G_{2,2} + V_2 V_1 (G_{2,1} \cos\theta_{2,1} + B_{2,1} \operatorname{sen}\theta_{2,1})$$

O Subsistema 1 é formado pela equação

$$\Delta P_2 = P_2^{esp} - P_2 = 0$$

A partir dos dados têm-se: $P_2^{esp} = -0{,}40$; $V_1 = V_1^{esp} = 1{,}0$; $V_2 = V_2^{esp} = 1{,}0$; $\theta_{2,1} = \theta_2 - \theta_1 = \theta_2$; $G_{2,1} = -0{,}1923$; $B_{2,1} = 0{,}9615$; $G_{2,2} = 0{,}1923$. Substituindo-se esses valores na equação de P_2, obtém-se:

$$P_2 = 0{,}1923(1 - \cos\theta_2) + 0{,}9615 \operatorname{sen}\theta_2$$

O problema consiste em se determinar o valor de θ_2 tal que ΔP_2 seja nulo. Aplicando-se o método de Newton, resulta:

1.ª *Iteração*

i) $\nu = 0$; $\theta_2^{(0)} = 0{,}0$

ii) $\Delta P_2(\theta_2^{(0)}) = -0{,}40 - 0{,}1923(1 - \cos\theta_2^{(0)}) - 0{,}9615 \operatorname{sen}\theta_2^{(0)} = -0{,}40$

iii) $|\Delta P_2^{(0)}| = 0{,}40 > 0{,}003$; o processo iterativo continua.

iv) $J(\theta_2^{(0)}) = H_{2,2}(\theta_2^{(0)}) = \partial P_2/\partial\theta_2\,|_{\theta_2^{(0)}} =$

$= 0{,}1923 \operatorname{sen}\theta_2^{(0)} + 0{,}9615 \cos\theta_2^{(0)} = 0{,}9615$

v) $\Delta P_2^{(0)} = H_{2,2}^{(0)}\,\Delta\theta_2^{(0)}$

$-0{,}40 = 0{,}9615\,\Delta\theta_2^{(0)} \rightarrow \Delta\theta_2^{(0)} = -0{,}4160$

$\theta_2^{(1)} = \theta_2^{(0)} + \Delta\theta_2^{(0)} = 0{,}0000 - 0{,}4160 = -0{,}4160$

vi) $\nu = 0 + 1 = 1$

2.ª *Iteração*

ii) $\Delta P_2(\theta_2^{(1)}) = -0{,}40 - 0{,}1923(1 - \cos\theta_2^{(1)}) - 0{,}9615 \operatorname{sen}\theta_2^{(1)} = -0{,}029$

iii) $|\Delta P_2^{(1)}| = 0{,}0279 > 0{,}003$; o processo iterativo continua.

iv) $J(\theta_2^{(1)}) = H_{2,2}(\theta_2^{(1)}) = \partial P_2/\partial\theta_2|_{\theta_2^{(0)}} =$

$= 0{,}1923 \operatorname{sen}\theta_2^{(1)} + 0{,}9615 \cos\theta_2^{(1)} = 0{,}8002$

v) $\Delta P_2^{(1)} = H_{2,2}^{(1)}\,\Delta\theta_2^{(1)}$

$-0{,}0279 = 0{,}8002\,\Delta\theta_2^{(1)} \rightarrow \Delta\theta_2^{(1)} = -0{,}0349.$

$\theta_2^{(2)} = \theta_2^{(1)} + \Delta\theta_2^{(1)} = 0{,}4160 - 0{,}0349 = -0{,}4509.$

vi) $\nu = 1 + 1 = 2.$

3.ª *Iteração*

ii) $\Delta P_2(\theta_2^{(2)}) = -0{,}40 - 0{,}1923(1 - \cos\theta_2^{(2)}) - 0{,}9615 \operatorname{sen}\theta_2^{(2)} = -0{,}0002.$

iii) $|\Delta P_2^{(2)}| = 0{,}0002 < 0{,}003$; o processo iterativo convergiu e a terceira iteração não precisa ser efetuada.

O processo de resolução está ilustrado graficamente na Fig. 5.4; note-se que o problema tem um número infinito de soluções, sendo que a solução fornecida pelo método de Newton depende basicamente do ponto inicial escolhido. A solução encontrada é aproximadamente igual a -6^0; as duas outras soluções mais próximas estão em torno de -154^0 e 206^0.

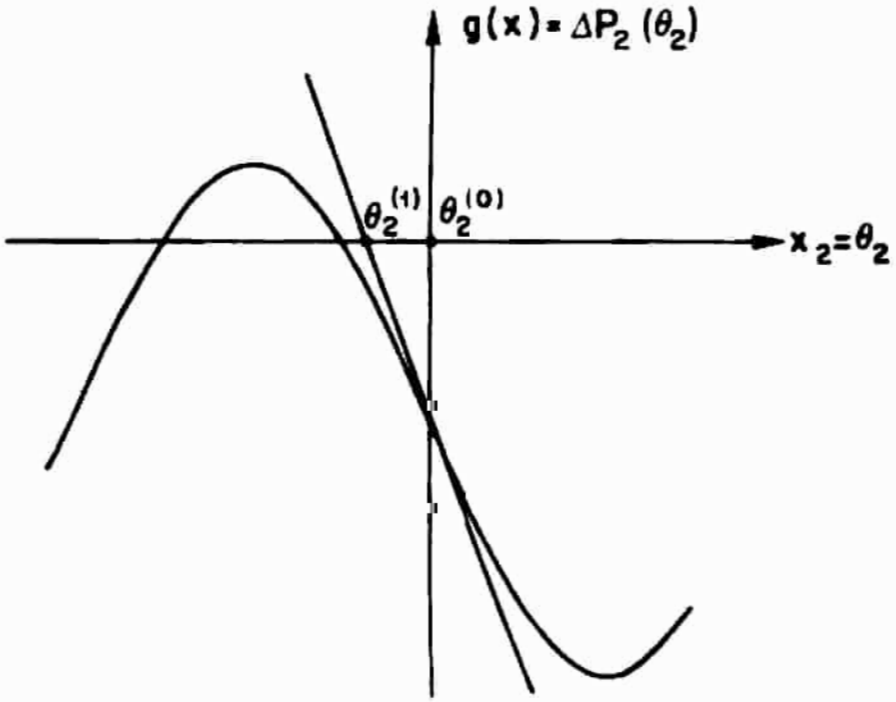
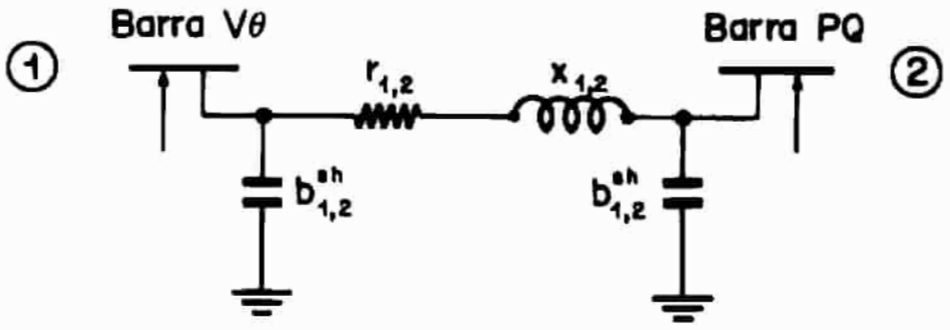


Figura 5.4 – Ilustração gráfica do processo de resolução do problema cujos dados estão na Fig. 5.3

No exemplo estudado anteriormente (Fig. 5.3), as tensões das duas barras são especificadas: a barra 1 é do tipo $V\theta$ e a barra 2, do tipo PV. Por isso o Subsistema 1 é formado por uma única equação ($\Delta P_2 = 0$), que é resolvida para se determinar a incógnita θ_2. Considere-se agora a rede representada na Fig. 5.5: os dados de linha são os mesmos do exemplo precedente, mas os dados de barra foram modificados; uma das alterações consistiu em substituir a barra PV por uma barra PQ. Neste novo exemplo, o Subsistema 1 passa a ter duas equações ($\Delta P_2 = 0$ e $\Delta Q_2 = 0$) e duas incógnitas (θ_2 e V_2).



Dados das barras (*pu*)

Barra	Tipo	P	Q	V	θ
1	$V\theta$	—	—	1,0	0,0
2	PQ	−0,30	0,07	—	—

Dados das linhas

Linha	r	x	b^{sh}
1-2	0,2	1,0	0,02

Tolerância da convergência em:

ΔP e ΔQ: $\varepsilon = 0{,}003$ *p.u.*

Figura 5.5 – Dados do fluxo de carga de uma rede-exemplo de duas barras

Uma síntese do processo iterativo resultante da aplicação do método de Newton é dada na tabela a seguir.

Iteração	Variáveis					
	θ_2^ν	V_2^ν	ΔP_2^ν	ΔQ_2^ν	$\Delta\theta_2^\nu$	ΔV_2^ν
$\nu = 0$	0,000	1,000	−0,300	0,090	−0,318	0,031
$\nu = 1$	−0,318	1,031	−0,006	−0,052	−0,012	−0,053
$\nu = 2$	−0,330	0,978	−0,001	−0,002	—	—

Os cálculos efetuados na construção dessa tabela estão detalhados a seguir. As matrizes G e B são as mesmas já calculadas anteriormente, ou seja:

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}1923 & -0{,}1923 \\ -0{,}1923 & 0{,}1923 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -0{,}9415 & 0{,}9615 \\ 0{,}9615 & -0{,}9415 \end{bmatrix}$$

As expressões das potências ativa e reativa da barra são:

$$P_2 = V_2^2 G_{2.2} + V_2 V_1 (G_{2.1} \cos \theta_{2.1} + B_{2.1} \operatorname{sen} \theta_{2.1})$$
$$Q_2 = -V_2^2 B_{2.2} + V_2 V_1 (G_{2.1} \operatorname{sen} \theta_{2.1} - B_{2.1} \operatorname{sen} \theta_{2.1})$$

O Subsistema 1 é formado pelas equações:

$$\Delta P_2 = P_2^{esp} - P_2 = 0$$

$$\Delta Q_2 = Q_2^{esp} - Q_2 = 0$$

A partir dos dados têm-se: $P_2^{esp} = -0{,}30$; $Q_2^{esp} = 0{,}07$; $V_1 = V^{esp} = 1{,}0$; $\theta_{2.1} = \theta_2 - \theta_1 = \theta_2$; $G_{2.1} = -0{,}1923$; $B_{2.1} = 0{,}9615$; $G_{2.2} = 0{,}1923$; $B_{2.2} = -0{,}9415$. Substituindo-se esses valores nas expressões de P_2 e Q_2, obtêm-se:

$$P_2 = 0{,}1923 V_2 (V_2 - \cos \theta_2) + 0{,}9615 V_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

$$Q_2 = 0{,}9415 V_2^2 - 0{,}1923 V_2 \operatorname{sen} \theta_2 - 0{,}9615 V_2 \cos \theta_2$$

Aplicando-se o método de Newton podem-se determinar iterativamente a magnitude e o ângulo da tensão da barra 2 (respectivamente, θ_2 e V_2):

1.ª *Iteração*

i) $v = 0$: $\theta_2^{(0)} = 0{,}0$ e $V_2^{(0)} = 1{,}0$.

ii) $P_2(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) = 0{,}1923 V_2^{(0)}(V_2^{(0)} - \cos \theta_2^{(0)}) + 0{,}9615 V_2^{(0)} \operatorname{sen} \theta_2^{(0)} = 0{,}0$

$Q_2(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) = 0{,}9415 (V_2^{(0)})^2 - 0{,}1923 V_2^{(0)} \operatorname{sen} \theta_2^{(0)} +$
$- 0{,}9615 V_2^{(0)} \cos \theta_2^{(0)} = -0{,}02$

$\Delta P_2^{(0)} = -0{,}30$; $\Delta Q_2^{(0)} = 0{,}09$

iii) $|\Delta P_2^{(0)}| = 0{,}30 > 0{,}003$ e $|\Delta Q_2^{(0)}| = 0{,}09 > 0{,}003$: o processo iterativo continua.

iv)

$$J(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) = \begin{vmatrix} H_{2.2}(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) & N_{2.2}(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) \\ M_{2.2}(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) & L_{2.2}(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}9615 & 0{,}1923 \\ 0{,}1923 & 0{,}9215 \end{vmatrix}$$

$$H_{2.2}(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) = \partial P_2/\partial \theta_2 \big|_{(\theta_2^{(0)},\ V_2^{(0)})} = -Q_2^{(0)} - (V_2^{(0)})^2 B_{2.2} = 0{,}9615$$

$$N_{2.2}(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) = \partial P_2/\partial V_2 \big|_{(\theta_2^{(0)},\ V_2^{(0)})} = [P_2^{(0)} + (V_2^{(0)})^2 G_{2.2}]/V_2^{(0)} = 0{,}1923$$

$$M_{2.2}(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) = \partial Q_2/\partial \theta_2 \big|_{(\theta_2^{(0)},\ V_2^{(0)})} = P_2^{(0)} - (V_2^{(0)})^2 G_{2.2} = -0{,}1923$$

$$L_{2.2}(\theta_2^{(0)}, V_2^{(0)}) = \partial Q_2/\partial V_2 \big|_{(\theta_2^{(0)},\ V_2^{(0)})} = [Q_2^{(0)} - (V_2^{(0)})^2 B_{2.2}]/V_2^{(0)} = 0{,}9215$$

v)

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(0)} \\ \Delta Q_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{2.2}^{(0)} & N_{2.2}^{(0)} \\ M_{2.2}^{(0)} & L_{2.2}^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(0)} \\ \Delta V_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}30 \\ 0{,}09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9615 & 0{,}1923 \\ -0{,}1923 & 0{,}9215 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(0)} \\ \Delta V_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(0)} \\ \Delta V_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9984 & -0{,}2083 \\ 0{,}2083 & 1{,}0417 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}30 \\ 0{,}09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3183 \\ 0{,}0312 \end{bmatrix}$$

$$\theta_2^{(1)} = \theta_2^{(0)} + \Delta\theta_2^{(0)} = 0{,}0000 - 0{,}3183 = -0{,}3183$$

$$V_2^{(1)} = V_2^{(0)} + \Delta V_2^{(0)} = 1{,}0000 + 0{,}0312 = 1{,}0312$$

vi) $\nu = 0 + 1 = 1$.

2.ª *Iteração*

ii) $P_2(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) = 0{,}1923\, V_2^{(1)}(V_2^{(1)} - \cos\theta_2^{(1)}) + 0{,}9615\, V_2^{(1)} \operatorname{sen}\theta_2^{(1)} =$
$= -0{,}2941$

$Q_2(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) = 0{,}9415\,(V_2^{(1)})^2 - 0{,}1923\, V_2^{(1)} \operatorname{sen}\theta_2^{(1)} +$
$- 0{,}9615\, V_2^{(1)} \cos\theta_2^{(1)} = 0{,}1215$

$\Delta P_2^{(1)} = -0{,}0059;\ \Delta Q_2^{(1)} = -0{,}0515$

iii) $|\Delta P_2^{(1)}| = 0{,}0059 > 0{,}003$ e $|\Delta Q_2^{(1)}| = 0{,}0515 > 0{,}003$; o processo iterativo continua.

iv)

$$J(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) = \begin{bmatrix} H_{2.2}(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) & N_{2.2}(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) \\ M_{2.2}(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) & L_{2.2}(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8797 & -0{,}0869 \\ -0{,}4986 & 1{,}0888 \end{bmatrix}$$

$$H_{2.2}(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) = \partial P_2/\partial \theta_2 \,|_{(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)})} = Q_2^{(1)} - (V_2^{(1)})^2 B_{2.2} = 0{,}8797$$

$$N_{2.2}(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) = \partial P_2/\partial V_2 \,|_{(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)})} = [P_2^{(1)} + (V_2^{(1)})^2 G_{2.2}]/V_2^{(1)} = -0{,}0869$$

$$M_{2.2}(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) = \partial Q_2/\partial \theta_2 \,|_{(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)})} = P_2^{(1)} - (V_2^{(1)})^2 G_{2.2} = -0{,}4986$$

$$L_{2.2}(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)}) = \partial Q_2/\partial V_2 \,|_{(\theta_2^{(1)}, V_2^{(1)})} = [Q_2^{(1)} - (V_2^{(1)})^2 B_{2.2}]/V_2^{(1)} = 1{,}0888$$

v)

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(1)} \\ \Delta Q_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{2.2}^{(1)} & N_{2.2}^{(1)} \\ M_{2.2}^{(1)} & L_{2.2}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}0059 \\ -0{,}0516 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8797 & -0{,}0869 \\ -0{,}4986 & 1{,}0888 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1906 & 0{,}0950 \\ 0{,}5452 & 0{,}9620 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}0059 \\ -0{,}0516 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0119 \\ -0{,}0528 \end{bmatrix}$$

$$\theta_2^{(2)} = \theta_2^{(1)} + \Delta\theta_2^{(1)} = -0{,}3183 - 0{,}0119 = -0{,}3302$$

$$V_2^{(2)} = V_2^{(1)} + \Delta\theta_2^{(1)} = 1{,}0312 - 0{,}0528 = 0{,}9784$$

vi) $v = 1 + 1 = 2$

3.ª *Iteração*

ii) $P_2(\theta_2^{(2)}, V_2^{(2)}) = 0{,}1923\, V_2^{(2)}(V_2^{(2)} - \cos\theta_2^{(2)}) + 0{,}9615\, V_2^{(2)} \operatorname{sen}\theta_2^{(2)} =$

$$= -0{,}2989$$

$$Q_2(\theta_2^{(2)}, V_2^{(2)}) = 0{,}9415\,(V_2^{(2)})^2 - 0{,}1923\, V_2^{(2)} \operatorname{sen}\theta_2^{(2)} +$$

$$- 0{,}9615\, V_2^{(2)} \cos\theta_2^{(2)} = 0{,}0676$$

$$\Delta P_2^{(2)} = -0{,}0011; \quad \Delta Q_2^{(2)} = -0{,}0024$$

iii) $|\Delta P_2^{(2)}| = 0{,}0011 < 0{,}003$ e $|\Delta Q_2^{(2)}| = 0{,}0024 < 0{,}003$: a terceira iteração não precisa ser efetuada.

5.4. *Métodos desacoplados* [8, 9]

Os métodos desacoplados, como o próprio nome sugere, baseiam-se no desacoplamento $P\theta - QV$, ou seja, são obtidos considerando-se o fato de as sensibilidades $\partial P/\partial\theta$ e $\partial Q/\partial V$ serem mais intensas que as sensibilidades $\partial P/\partial V$ e $\partial Q/\partial\theta$. Este tipo de relação em geral é verificado para redes de transmissão em extra-alta tensão (EAT; > 230 kV) e ultra-alta tensão (UAT; > 750 kV).

O desacoplamento possibilita a adoção de um esquema de resolução segundo o qual os subproblemas $P\theta$ e QV são resolvidos alternadamente: na resolução do subproblema $P\theta$ são utilizados os valores atualizados de V; na resolução do subproblema QV são utilizados os valores atualizados de θ.

Neste capítulo são apresentadas duas versões desacopladas do método de Newton. Na primeira, conhecida como método de Newton desacoplado, as submatrizes jacobianas N e M são feitas iguais a zero. Na segunda, chamada de método desacoplado rápido, além de se ignorar o efeito das submatrizes jacobianas N e M, as submatrizes H e L são mantidas constantes durante o processo iterativo. Note-se que em ambas as versões desacopladas do método de Newton só são introduzidas aproximações na matriz jacobiana, sendo os vetores dos resíduos $\Delta\underline{P}$ e $\Delta\underline{Q}$ calculados da mesma forma que no método de Newton, ou seja, utilizando-se as expressões (5.3) e (5.4) apresentadas no capítulo precedente. A introdução de aproximações na matriz jacobiana altera o processo de convergência, isto é, muda o caminho percorrido entre o ponto inicial e a solução, mas não altera a solução final pois o problema resolvido permanece o mesmo $[\Delta\underline{P}(\underline{V}, \underline{\theta}) = 0;\ \Delta\underline{Q}(\underline{V}, \underline{\theta}) = 0]$. O desacoplamento é introduzido apenas no algoritmo de resolução, sem afetar o modelo da rede. As Figs. 5.1 e 5.2 podem ser usadas para ilustrar o efeito de aproximações introduzidas no cálculo da matriz jacobiana: em ambas as figuras o problema resolvido é o mesmo [modelo $g(x) = 0$]: entretanto, na Fig. 5.2, a derivada $g'(x)$ (matriz jacobiana) é mantida constante durante o processo de resolução; pode-se observar que as soluções obtidas nos dois casos são idênticas, apesar de as seqüências de soluções intermediárias serem distintas. A aproximação introduzida no método da Fig. 5.2 consistiu em manter-se a derivada constante; existem, no entanto, outros tipos de aproximações no cálculo da derivada $g'(x)$ que também levariam à mesma solução final. Resumindo, os métodos desacoplados aproximam o cálculo das derivadas mas mantêm a integridade do modelo da rede e, por isso, não afetam a solução final do fluxo de carga.

5.4.1. *Método de Newton desacoplado* [8]

O algoritmo básico do método de Newton, desenvolvido no capítulo precedente, pode ser colocado na forma:

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{P}(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu}) &= H(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu})\Delta\underline{\theta}^{\nu} + N(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu})\Delta\underline{V}^{\nu} \\
\Delta \underline{Q}(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu}) &= M(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu})\Delta\underline{\theta}^{\nu} + L(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu})\Delta\underline{V}^{\nu} \\
\underline{\theta}^{\nu+1} &= \underline{\theta}^{\nu} + \Delta\underline{\theta}^{\nu} \\
\underline{V}^{\nu+1} &= \underline{V}^{\nu} + \Delta\underline{V}^{\nu}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

A dedução do método de Newton desacoplado é feita em duas etapas: desacoplamento e aplicação do esquema alternado de resolução. Pelo desacoplamento $P\theta - QV$ os termos $N\Delta\underline{V}$ e $M\Delta\underline{\theta}$ são ignorados, o que torna possível colocar o algoritmo de Newton na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{P}(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu}) &= H(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu})\Delta\underline{\theta}^{\nu} \\
\Delta \underline{Q}(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu}) &= L(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu})\Delta\underline{V}^{\nu} \\
\underline{\theta}^{\nu+1} &= \underline{\theta}^{\nu} + \Delta\underline{\theta}^{\nu} \\
\underline{V}^{\nu+1} &= \underline{V}^{\nu} + \Delta\underline{V}^{\nu}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

A recorrência dada pelas Eqs. (5.48) ainda está colocada na forma simultânea, isto é, $\underline{\theta}$ e $\underline{V}$ são atualizados ao mesmo tempo. A segunda etapa da obtenção do método desacoplado consiste em se aplicar o esquema de resolução alternado, resultando:

$$\begin{aligned}
\Delta \underline{P}(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu}) &= H(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu})\,\Delta\underline{\theta}^{\nu} \\
\underline{\theta}^{\nu+1} &= \underline{\theta}^{\nu} + \Delta\underline{\theta} \\
\Delta \underline{Q}(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu+1}) &= L(\underline{V}^{\nu}, \underline{\theta}^{\nu})\,\Delta\underline{V}^{\nu} \\
\underline{V}^{\nu+1} &= \underline{V}^{\nu} + \Delta\underline{V}^{\nu}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Note-se que, colocando-se o algoritmo na forma alternada (5.49), as aproximações introduzidas na matriz jacobiana com a passagem de (5.47) para (5.46) são parcialmente compensadas pelo fato de as variáveis $\underline{\theta}$ e $\underline{V}$ serem atualizadas a cada meia-iteração; no algoritmo dado em (5.49), imediatamente após a obtenção de uma nova estimativa de $\underline{\theta}$ ou $\underline{V}$, esses valores já são utilizados no cálculo subseqüente de $\Delta\underline{Q}$ e $\Delta\underline{P}$.

Existem situações nas quais os subproblemas $P\theta$ e QV têm velocidades de convergência distintas: o subproblema $P\theta$, por exemplo, pode convergir antes que o subproblema QV. Nesses casos, podem-se obter algumas vantagens computacionais iterando-se apenas com o subproblema ainda não resolvido. Para que isso seja possível é adotado o esquema ilustrado na Fig. 5.6, no qual são utilizados dois contadores de iteração

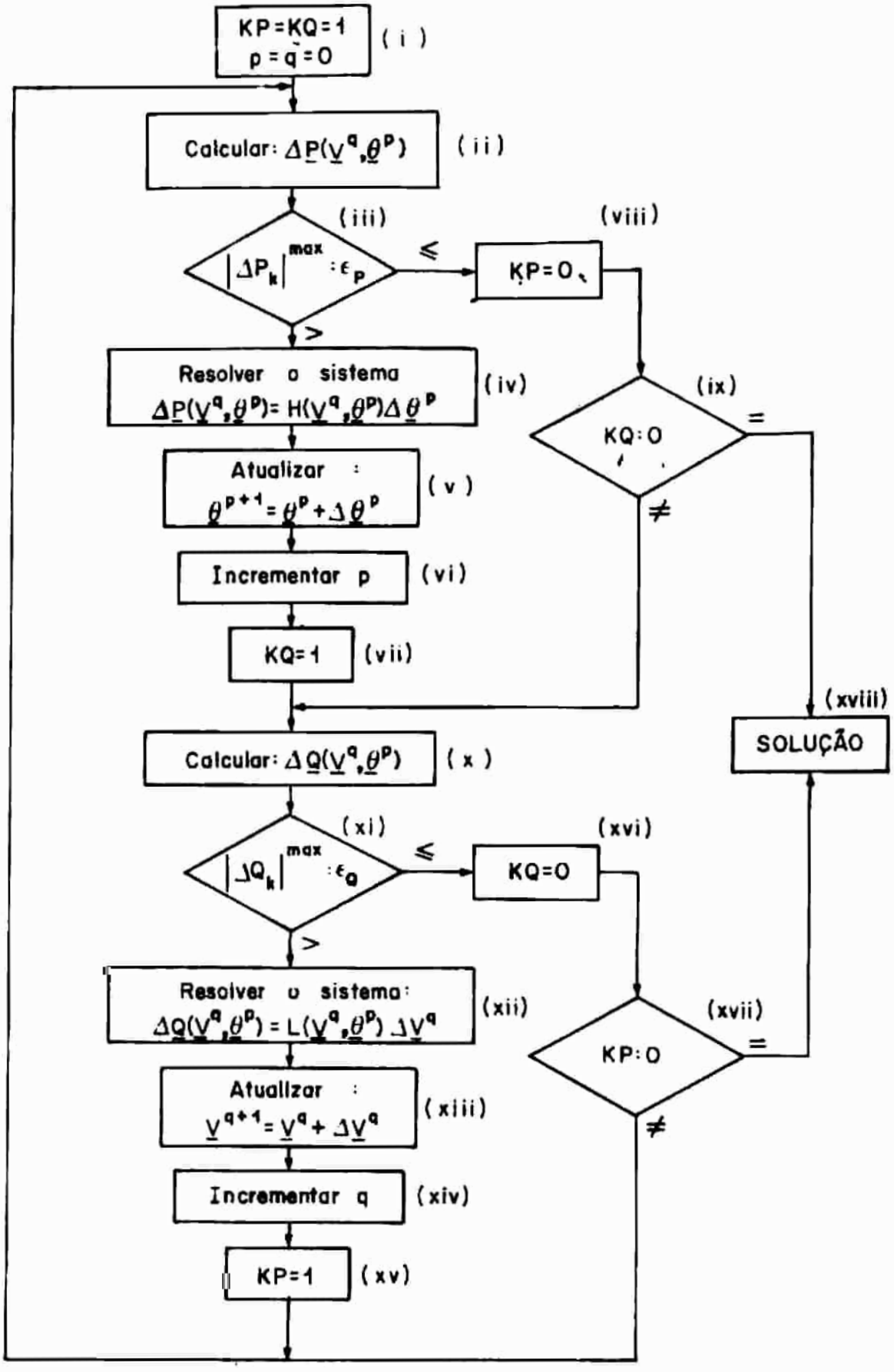


Figura 5.6 – Método de Newton desacoplado

independentes para os subproblemas $P\theta$ e QV (p e q, respectivamente). As variáveis KP e KQ são utilizadas para indicar se os subproblemas $P\theta$ e QV estão convergidos ($=0$) ou não ($=1$). No bloco *vii*, após completada uma iteração $P\theta$, o índice KQ é feito igual a 1: isso porque o subproblema QV já poderia estar resolvido, em uma passagem precedente ($KQ=0$), e ter-se afastado do ponto-solução devido à correção $\Delta\theta$ introduzida no ângulo θ, durante uma iteração $P\theta$. Comentário análogo pode ser feito em relação ao bloco *xv*.

Considere-se como exemplo a resolução do problema formulado na Fig. 5.5. As equações que formam o Subsistema 1 já foram deduzidas anteriormente e estão reescritas a seguir:

$$\Delta P_2 = P_2^{esp} - P_2 = -0{,}30 - 0{,}1923\,V_2(V_2 - \cos\theta_2) - 0{,}9615\,V_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\Delta Q_2 = Q_2^{esp} - Q_2 = 0{,}07 - 0{,}9415\,V_2^2 + 0{,}1923\,V_2 \operatorname{sen}\theta_2 + 0{,}9615\,V_2\cos\theta_2$$

A seguir, aplica-se o método de Newton desacoplado, conforme o algoritmo da Fig. 5.6, na resolução do problema proposto:

i) $KP = KQ = 1$; $p = q = 0$; $\theta_2^{(0)} = 0{,}0$ e $V_2^{(0)} = 1{,}0$

1.ª *Iteração* $P\theta$

ii) $P_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)}) = 0{,}1923\,V_2^{(0)}(V_2^{(0)} - \cos\theta_2^{(0)}) + 0{,}9615\,V_2^{(0)} \operatorname{sen}\theta_2^{(0)} = 0{,}0$

$\Delta P_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)}) = -0{,}30$

iii) $|\Delta P_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)})| = 0{,}30 > 0{,}003$: ir para o bloco *iv*.

iv) $H_{2,2}(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)}) = \partial P_2/\partial\theta_2\,|_{(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)})} = -Q_2^{(0)} - (V_2^{(0)})^2\,B_{2,2} = 0{,}9615$

$\Delta P_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)}) = H_{2,2}(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)})\,\Delta\theta_2^{(0)}$: $-0{,}30 = 0{,}9615\,\Delta\theta_2^{(0)}$

$\Delta\theta_2^{(0)} = -0{,}3120$

v) $\theta_2^{(1)} = \theta_2^{(0)} + \Delta\theta_2^{(0)} = 0{,}0000 - 0{,}3120 = -0{,}3120$

vi) $p = 0 + 1 = 1$

vii) $KQ = 1$: ir para o bloco *x*.

1.ª *Iteração* QV

x) $Q_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)}) = 0{,}9415(V_2^{(0)})^2 - 0{,}1923\,V_2^{(0)} \operatorname{sen}\theta_2^{(1)} +$

$- 0{,}9615\,V_2^{(0)}\cos\theta_2^{(1)} = -0{,}0545$

$\Delta Q_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)}) = -0{,}0155$

xi) $|\Delta Q_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)})| = 0{,}0155 > 0{,}003$: ir para o bloco *xii*.

xii) $L_{2,2}(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)}) = \partial Q_2/\partial V_2 \,|_{(V_2^{(0)},\, \theta_2^{(1)})} = [Q_2^{(0)} - (V_2^{(0)})^2 B_{2,2}]/V_2^{(0)} = 1{,}0270$

$\Delta Q_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)}) = L_{2,2}(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)}) \Delta V_2^{(0)}: \; -0{,}0155 = 1{,}0270\, \Delta V_2^{(0)}$

$\Delta V_2^{(0)} = -0{,}0151$

xiii) $V_2^{(1)} = V_2^{(0)} + \Delta V_2^{(0)} = 1{,}0000 - 0{,}0151 = 0{,}9849$

xiv) $q = 0 + 1 = 1$

xv) $KP = 1$; ir para o bloco *ii*.

2.ª *Iteração P0*

ii) $P_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}) = 0{,}1923\, V_2^{(1)}(V_2^{(1)} - \cos\theta_2^{(1)}) + 0{,}9615\, V_2^{(1)} \operatorname{sen}\theta_2^{(1)} =$

$= -0{,}2844$

$\Delta P_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}) = -0{,}0156$

iii) $|\Delta P_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)})| = 0{,}0156 > 0{,}003$; ir para o bloco *iv*.

iv) $H_{2,2}(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}) = \partial P_2/\partial\theta_2 \,|_{(V_2^{(1)},\, \theta_2^{(1)})} = -Q_2^{(1)} - (V_2^{(1)})^2 B_{2,2} = 0{,}8432$

$\Delta P_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}) = H_{2,2}(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}) \Delta\theta_2^{(1)}: \; -0{,}0156 = 0{,}8432\, \Delta\theta_2^{(1)}$

$\Delta\theta_2^{(1)} = -0{,}0185$

v) $\theta_2^{(2)} = \theta_2^{(1)} + \Delta\theta_2^{(1)} = -0{,}3120 - 0{,}0185 = -0{,}3305$

vi) $p = 1 + 1 = 2$

vii) $KQ = 1$: ir para o bloco *x*.

2.ª *Iteração QV*

x) $Q_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}) = 0{,}9415(V_2^{(1)})^2 - 0{,}1923\, V_2^{(1)} \operatorname{sen}\theta_2^{(2)} -$

$- 0{,}9615\, V_2^{(1)} \cos\theta_2^{(2)} = -0{,}0609$

$\Delta Q_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(2)}) = -0{,}0091$

xi) $|\Delta Q_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(2)})| = 0{,}0091 > 0{,}003$: ir para o bloco *xii*

xii) $L_{2,2}(V_2^{(1)}, \theta_2^{(2)}) = \partial Q_2/\partial V_2 \,|_{(V_2^{(1)},\, \theta_2^{(2)})} = [Q_2^{(1)} - (V_2^{(1)})^2 B_{2,2}]/V_2^{(1)} = 1{,}0076$

$\Delta Q_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(2)}) = L_{2,2}(V_2^{(1)}, \theta_2^{(2)})\, \Delta V_2^{(1)}: \; -0{,}0091 = 1{,}0076\, \Delta V_2^{(1)}$

$\Delta V_2^{(1)} = -0{,}0090$

xiii) $V_2^{(2)} = V_2^{(1)} + \Delta V_2^{(1)} = 0{,}9849 - 0{,}0090 = 0{,}9759$

xiv) $q = 1 + 1 = 2$

xv) $KP = 1$: ir para o bloco *ii*.

3.ª *Iteração Pθ*

ii) $P_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)}) = 0{,}1923\, V_2^{(2)}(V_2^{(2)} - \cos\theta_2^{(2)}) + 0{,}9615\, V_2^{(2)} \operatorname{sen}\theta_2^{(2)} =$
$= -0{,}2989$
$\Delta P_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)}) = -0{,}0011$

iii) $|\Delta P_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)})| = 0{,}0011 < 0{,}003$; o subproblema $P\theta$ convergiu e esta iteração não precisa ser efetuada; ir para o bloco *viii*.

viii) $KP = 0$; ir para o bloco *ix*.

ix) O subproblema QV ainda não convergiu pois $KQ = 1$; ir para o bloco *x*.

3.ª *Iteração QV*

x) $Q_2(\theta_2^{(2)}, V_2^{(2)}) = 0{,}9415(V_2^{(2)})^2 - 0{,}1923\, V_2^{(2)} \operatorname{sen}\theta_2^{(2)} +$
$- 0{,}9615\, V_2^{(2)} \cos\theta_2^{(2)} = -0{,}0693$
$\Delta Q_2(\theta_2^{(2)}, V_2^{(2)}) = -0{,}0007$

xi) $|\Delta Q_2(\theta_2^{(2)}, V_2^{(2)})| = 0{,}0007 < 0{,}003$; o subproblema QV convergiu e esta iteração não precisa ser efetuada; ir para o bloco *xvi*.

xvi) $KQ = 0$; ir para o bloco *xvii*.

xvii) O subproblema $P\theta$ também convergiu pois $KP = 0$

xviii) A solução obtida é $\theta_2 = \theta_2^{(2)} = -0{,}330$ e $V_2 = V_2^{(2)} = 0{,}976$.

Uma síntese do processo iterativo é dada na tabela abaixo.

Iteração	Variáveis					
	θ_2^q	V_2^q	ΔP_2^q	ΔQ_2^q	$\Delta\theta_2^q$	ΔV_2^q
$p = q = 0$	0,000	1,000	−0,300	−0,016	−0,312	−0,015
$p = q = 1$	−0,312	0,985	−0,016	−0,009	−0,018	−0,009
$p = q = 2$	−0,330	0,976	−0,001	−0,0007	—	—

A Fig. 5.7 ilustra graficamente como opera o método de Newton desacoplado: na primeira iteração $P\theta$, a curva $\Delta P \times \theta_2$ é obtida considerando-se $V_2 = V_2^{(0)}$; a curva $\Delta Q_2 \times V_2$, utilizada na primeira iteração

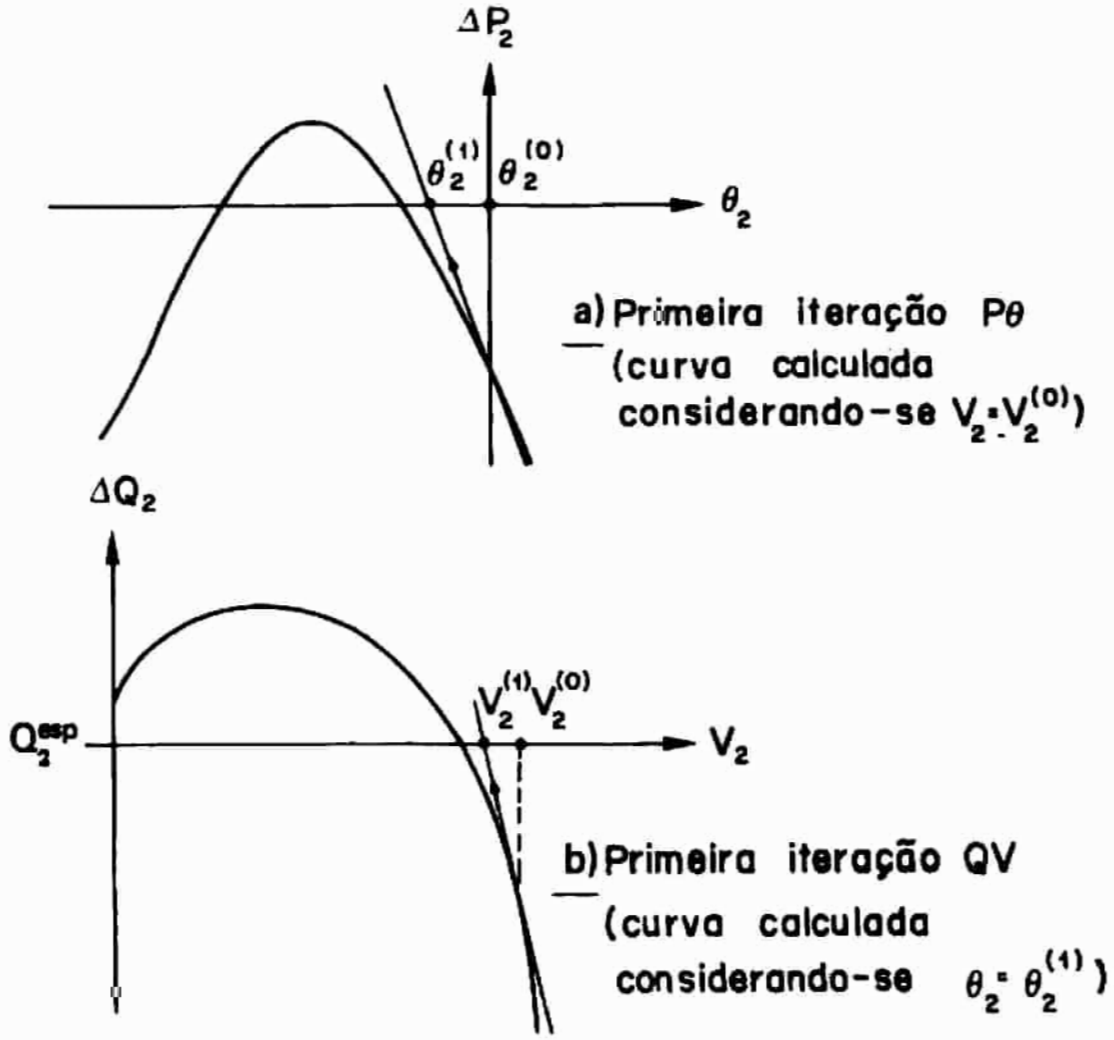


Figura 5.7 – Primeira iteração do método de Newton desacoplado

QV, é obtida utilizando-se $\theta_2 = \theta_2^{(1)}$. Procedimento análogo é seguido nas iterações subseqüentes, lembrando-se de que, a cada nova iteração, as curvas $\Delta P_2 \times \theta_2$ e $\Delta Q_2 \times V_2$ são recalculadas tomando-se os valores atualizados V_2^q e θ_2^p, respectivamente.

O método de Newton desacoplado, esquematizado na Fig. 5.6, pode também ser aplicado em uma versão ligeiramente diferente, que será descrita a seguir. Essa versão pode apresentar, para alguns sistemas, uma convergência um pouco mais rápida que a versão descrita anteriormente. Seja V a matriz diagonal cujos elementos não-nulos são as magnitudes das tensões das barras PQ do sistema. Com a ajuda dessa matriz V, as submatrizes jacobianas H e L podem ser postas na forma

$$H = VH'$$
$$L = VL' \tag{5.50}$$

em que as componentes das submatrizes jacobianas H' e L' são dadas por [*ver as Eqs.* (5.35), (5.38), (5.39) *e* (5.42)]:

$$\begin{aligned} H'_{km} &= V_m (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ H'_{kk} &= -Q_k/V_k - V_k B_{kk} \end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned} L'_{km} &= G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km} \\ L'_{kk} &= Q_k/V_k^2 - B_{kk} \end{aligned} \tag{5.52}$$

As equações do método de Newton desacoplado podem, finalmente, ser colocadas na forma:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{P}/V &= H' \Delta \underline{\theta} \\ \Delta \underline{Q}/V &= L' \Delta \underline{V} \end{aligned} \tag{5.53}$$

Essa formulação será utilizada a seguir na dedução das equações do método desacoplado rápido.

5.4.2. *Método desacoplado rápido* [9]

O método desacoplado rápido tem o mesmo algoritmo básico que o método de Newton desacoplado representado na Fig. 5.6. A diferença fundamental entre os dois métodos desacoplados é que, no método desacoplado rápido, são utilizadas as equações $\Delta \underline{P}/V = B' \Delta \underline{\theta}$ e $\Delta \underline{Q}/V = B'' \Delta \underline{V}$, nas quais aparecem as matrizes constantes B' e B'', respectivamente (como se verá a seguir, a matriz B' é a mesma do fluxo de carga CC estudado no Cap. 2).

Nas expressões (5.51) e (5.52) podem ser introduzidas as seguintes aproximações:

a) $\cos \theta_{km}$ é muito próximo de 1;

b) B_{km} é, em magnitude, muito maior que $G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}$;

c) $B_{kk} V_k^2$ é, em magnitude, muito maior que Q_k.

As aproximações *a* e *b* são em geral válidas para sistemas de transmissão, em particular para EAT e UAT. Para linhas de transmissão acima de 230 kV, a relação B_{km}/G_{km} tem magnitude maior que 5, podendo ser da ordem de 20 em linhas de 500 kV. A aproximação *c* em geral também é válida pois se baseia no fato de as reatâncias shunt (cargas, reatores, capacitores, shunts de linhas etc.) de uma rede de transmissão serem muito maiores que as reatâncias série (linhas e transformadores).

Introduzindo-se as aproximações *a*, *b* e *c* nas expressões (5.51) e (5.52), obtêm-se:

$$H'_{km} \cong -V_m B_{km}$$
$$H'_{kk} \cong -V_k B_{kk} \tag{5.54}$$

$$L'_{km} \cong -B_{km}$$
$$L'_{kk} \cong -B_{kk} \tag{5.55}$$

Considerando-se ainda que V_m e V_k são aproximadamente unitárias, podem-se aproximar as submatrizes jacobianas H' e L' por:

$$H' \cong B'$$
$$L' \cong B'' \tag{5.56}$$

em que as matrizes B' e B'' só dependem dos parâmetros da rede, não dependendo, portanto, das variáveis de estado do sistema (ângulos e magnitudes das tensões nodais). Essas duas matrizes são semelhantes à matriz de susceptâncias B (lembrar que a matriz admitância Y é colocada na forma $Y = G + jB$), com a diferença que em B' não aparecem as linhas e colunas referentes às barras $V\theta$, e em B'' não aparecem as linhas e colunas referentes às barras PV e às barras $V\theta$. Ou seja, as matrizes B' e B'' mantêm as estruturas das submatrizes jacobianas H e L.

Substituindo-se (5.56) em (5.53), obtêm-se as equações do método desacoplado rápido:

$$\Delta \underline{P}/V = B' \Delta \underline{\theta}$$
$$\Delta \underline{Q}/V = B'' \Delta \underline{V} \tag{5.57}$$

Essas duas equações entram nos blocos *iv* e *xii* do diagrama da Fig. 5.6 no lugar, respectivamente, das equações $\Delta \underline{P} = H \Delta \underline{\theta}$ e $\Delta \underline{Q} = L \Delta \underline{V}$.

As matrizes B' e B'' têm estruturas diferentes devido à existência de barras PV (as colunas e linhas correspondentes a essas barras não aparecem na matriz B'', da mesma forma que não aparecem na matriz jacobiana). Pode-se, entretanto, trabalhar com matrizes B' e B'' de dimensões e estruturas semelhantes desde que se utilize um artifício que consiste em se construir a matriz B'' como se todas as barras PV fossem do tipo PQ e adicionar-se um número muito grande aos elementos da diagonal principal correspondentes às barras que, de fato, são do tipo PV.

A relação $\Delta \underline{Q}/V = B'' \Delta \underline{V}$ expressa a sensibilidade entre os vetores $\Delta \underline{Q}$ e $\Delta \underline{V}$. Do ponto de vista dessa relação, o artifício citado equivale à adição de susceptâncias *shunt* com valores elevados (reatâncias pequenas) nas barras que são do tipo PV, o que torna a magnitude das tensões dessas barras praticamente insensíveis às perturbações $\Delta \underline{Q}$. Assim sendo, as componentes do vetor $\Delta \underline{V}$ correspondentes às barras PV serão nulas e,

portanto, as magnitudes das tensões dessas barras permanecerão constantes, como se deseja que ocorra nas barras PV. Para que as componentes de $\Delta \underline{V}$ associadas às barras PQ não sejam afetadas pelo artifício, as componentes de $\Delta \underline{Q}$ correspondentes às barras PV são consideradas nulas, o que é conveniente, pois nessas barras não é especificada a injeção de potência reativa.

Algumas melhorias no desempenho do método foram observadas quando, na formação da matriz B', analogamente ao que se faz no fluxo de carga CC, desprezaram-se as resistências série, aproximando-se b_{km} por $-1/x_{km}$. Resumindo, os elementos das matrizes B' e B'' são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} B'_{km} &= -x_{km}^{-1} \\ B'_{kk} &= \sum_{m=1}^{NB} x_{km}^{-1} \end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned} B''_{km} &= -B_{km} \\ B''_{kk} &= -B_{kk} \end{aligned} \tag{5.59}$$

em que B_{km} e B_{kk} são os elementos da matriz de susceptâncias B e x_{km} é a reatância série de uma linha ou transformador.

Considere-se, novamente, a resolução do problema formulado na Fig. 5.5. Esse problema, que já foi resolvido anteriormente pelo método de Newton e pelo método de Newton desacoplado, será estudado a seguir utilizando-se o método desacoplado rápido. Os vários passos do processo de resolução estão numerados da mesma forma que o diagrama da Fig. 5.6. As matrizes B' e B'' são unidimensionais e dadas por

$$B' = x_{1,2}^{-1} = 1{,}0$$

$$B'' = -B_{2,2} = 0{,}9415$$

i) $KP = KQ = 1$; $p = q = 0$; $\theta_2^{(0)} = 0{,}0$ e $V_2^{(0)} = 1{,}0$

1.ª *Iteração P0*

ii) $P_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)}) = 0{,}1923\, V_2^{(0)}(V_2^{(0)} - \cos\theta_2^{(0)}) + 0{,}9615\, V_2^{(0)} \operatorname{sen}\theta_2^{(0)} = 0{,}0$

$\Delta P_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)}) = -0{,}30$

iii) $|\Delta P_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)})| = 0{,}30 > 0{,}003$; ir para o bloco *iv*.

iv) $\Delta P_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(0)})/V_2^{(0)} = B'\Delta\theta_2^{(0)}$; $-0{,}30 = 1{,}0\,\Delta\theta_2^{(0)}$

$\Delta\theta_2^{(0)} = -0{,}3000$

v) $\theta_2^{(1)} = \theta_2^{(0)} + \Delta\theta_2^{(0)} = 0{,}0000 - 0{,}3000 = -0{,}3000$

vi) $p = 0 + 1 = 1$

vii) $KQ = 1$; ir para o bloco *x*.

1.ª *Iteração QV*

x) $Q_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)}) = 0{,}9415\,(V_2^{(0)})^2 - 0{,}1923\,V_2^{(0)} \operatorname{sen} \theta_2^{(1)} +$
$- 0{,}9615\,V_2^{(0)} \cos \theta_2^{(1)} = -0{,}0602$

$\Delta Q_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)}) = -0{,}0098$

xi) $|\Delta Q_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)})| = 0{,}0098 > 0{,}003$; ir para o bloco *xii*.

xii) $\Delta Q_2(V_2^{(0)}, \theta_2^{(1)}) / V_2^{(0)} = B''\Delta V_2^{(0)}$; $-0{,}0098 = 0{,}9415\,\Delta V_2^{(0)}$

$\Delta V_2^{(0)} = -0{,}0104$

xiii) $V_2^{(1)} = V_2^{(0)} + \Delta V_2^{(0)} = 1{,}0000 - 0{,}0104 = 0{,}9896$

xiv) $q = 0 + 1 = 1$

xv) $KP = 1$; ir para o bloco *ii*.

2.ª *Iteração Pθ*

ii) $P_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}) = 0{,}1923\,V_2^{(1)}(V_2^{(1)} - \cos \theta_2^{(1)}) + 0{,}9615\,V_2^{(1)} \operatorname{sen} \theta_2^{(1)} =$
$= -0{,}2747$

$\Delta P_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}) = -0{,}0253$

iii) $|\Delta P_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)})| = 0{,}0253 > 0{,}003$; ir para o bloco *iv*.

iv) $\Delta P_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}) / V_2^{(1)} = B'\Delta\theta_2^{(1)}$; $-0{,}0256 = 1{,}0\,\Delta\theta_2^{(1)}$

$\Delta\theta_2^{(1)} = -0{,}0256$

v) $\theta_2^{(2)} = \theta_2^{(1)} + \Delta\theta_2^{(1)} = -0{,}3000 - 0{,}0256 = -0{,}3256$

vi) $p = 1 + 1 = 2$

vii) $KQ = 1$; ir para o bloco *x*.

2.ª *Iteração QV*

x) $Q_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(2)}) = 0{,}9415\,(V_2^{(1)})^2 - 0{,}1923\,V_2^{(1)} \operatorname{sen} \theta_2^{(2)} +$
$- 0{,}9615\,V_2^{(1)} \cos \theta_2^{(2)} = -0{,}0586$

$\Delta Q_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(2)}) = -0{,}0114$

xi) $|\Delta Q_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(2)})| = 0{,}0114 > 0{,}003$: ir para o bloco *xii*

xii) $\Delta Q_2(V_2^{(1)}, \theta_2^{(2)})/V_2^{(1)} = B''\Delta V_2^{(1)}$; $-0{,}0115 = 0{,}9415\,\Delta V_2^{(1)}$

$\Delta V_2^{(2)} = -0{,}0122$

xiii) $V_2^{(2)} = V_2^{(1)} + \Delta V_2^{(1)} = 0{,}9896 - 0{,}0122 = 0{,}9774$

xiv) $q = 1 + 1 = 2$

xv) $KP = 1$; ir para o bloco *ii*.

3.ª *Iteração P0*

ii) $P_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)}) = 0{,}1923\,V_2^{(2)}(V_2^{(2)} - \cos\theta_2^{(2)}) + 0{,}9615\,V_2^{(2)}\operatorname{sen}\theta_2^{(2)} =$

$= -0{,}2950$

$\Delta P(V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)}) = -0{,}0050$

iii) $|\Delta P(V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)})| = 0{,}0050 > 0{,}003$: ir para o bloco *iv*.

iv) $\Delta P_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)})/V_2^{(2)} = B'\Delta\theta_2^{(2)}$; $-0{,}0051 = 1{,}0\,\Delta\theta_2^{(2)}$

$\Delta\theta_2^{(2)} = -0{,}0051$

v) $\theta_2^{(3)} = \theta_2^{(2)} + \Delta\theta_2^{(2)} = -0{,}3256 - 0{,}0051 = -0{,}3307$

vi) $p = 2 + 1 = 3$

vii) $KQ = 1$; ir para o bloco *x*.

3.ª *Iteração QV*

x) $Q_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(3)}) = 0{,}9415\,(V_2^{(2)})^2 - 0{,}1923\,V_2^{(2)}\operatorname{sen}\theta_2^{(3)} +$

$- 0{,}9615\,V_2^{(2)}\cos\theta_2^{(3)} = -0{,}0684$

$\Delta Q_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(3)}) = -0{,}0016$

xi) $|\Delta Q_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(3)})| = 0{,}0016 < 0{,}003$; o subproblema *QV* convergiu e esta iteração não precisa ser efetuada; ir para o bloco *xvi*.

xvi) $KQ = 0$; ir para o bloco *xvii*.

xvii) O subproblema *P0* ainda não convergiu pois $KP = 1$; ir para o bloco *ii*.

4.ª *Iteração* $P\theta$

ii) $P_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(3)}) = 0{,}1923\, V_2^{(2)}(V_2^{(2)} - \cos\theta_2^{(3)}) + 0{,}9615\, V_2^{(2)} \operatorname{sen}\theta_2^{(3)} =$
$= -0{,}2990$

$\Delta P_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)}) = -0{,}0010$

iii) $|\Delta P_2(V_2^{(2)}, \theta_2^{(3)})| = 0{,}0010 < 0{,}003$: ir para o bloco *viii*.

viii) $KP = 0$: ir para o bloco *ix*.

ix) O subproblema QV também convergiu pois $KQ = 0$.

xviii) A solução obtida é $\theta_2 = \theta_2^{(3)} = -0{,}331$ e $V_2 = V_2^{(2)} = 0{,}977$.

Uma síntese do processo iterativo é dada na tabela abaixo.

Iteração	Variáveis					
	θ_2^q	V_2^q	ΔP_2^q	ΔQ_2^q	$\Delta\theta_2^q$	ΔV_2^q
$p = q = 0$	0,000	1,000	−0,300	−0,010	−0,300	−0,010
$p = q = 1$	−0,300	0,990	−0,025	−0,011	−0,026	−0,012
$p = q = 2$	−0,326	0,977	−0,005	−0,002	−0,005	—
$p = 3$	−0,331	—	−0,001	—	—	—

Note-se que, dentro da tolerância especificada ($\varepsilon = 0{,}003$), os resultados obtidos (θ_2 e V_2) são os mesmos calculados anteriormente, utilizando-se o método de Newton e o método de Newton desacoplado; para que as estimativas de θ_2 e V_2 obtidas pelos três métodos se aproximem ainda mais, basta que se diminua a tolerância de convergência ε, o que exigiria um número maior de iterações. Note-se também que o método de Newton desacoplado convergiu em duas iterações $P\theta$ e duas iterações QV enquanto o método desacoplado rápido efetuou três iterações $P\theta$ e duas iterações QV. O fato de o método desacoplado rápido utilizar uma iteração $P\theta$ adicional não deve ser encarado como uma desvantagem uma vez que, como as matrizes B' e B'' são constantes, as iterações são menos trabalhosas.

Na obtenção de alguns tipos de equivalentes externos (*ver o Cap. 7*), podem aparecer, na rede reduzida, elementos *shunt* com admitâncias anormalmente elevadas, o que muitas vezes provoca dificuldades de convergência do método desacoplado rápido (convergência lenta ou, até mesmo, divergência). Este tipo de dificuldade motivou o desenvolvimento de uma versão modificada do método desacoplado rápido, que será apresentada a seguir. A diferença em relação ao método original está

na maneira como as susceptâncias *shunt* são incluídas na diagonal principal da matriz B''; enquanto na versão original do método as susceptâncias *shunt* são adicionadas à diagonal principal de B'', na versão modificada essas susceptâncias são introduzidas na diagonal principal multiplicadas por 2. Para se entender o que significa essa modificação, é interessante que se retome a dedução do método desacoplado rápido e se analise a maneira como foi obtida a matriz B''.

Conforme foi visto anteriormente, a matriz B'' é obtida a partir da submatriz jacobiana L', cujos elementos da diagonal principal são dados pela Eq. (5.52), que está reescrita a seguir:

$$L'_{kk} = -B_{kk} + Q_k/V_k^2 = -\sum_{m\in\Omega_k} b_{km} - (b_k^{sh} + \sum_{m\in\Omega_k} b_{km}^{sh}) + Q_k/V_k^2 \qquad (5.60)$$

O elemento B''_{kk} da matriz B'' foi obtido considerando-se a magnitude de Q_k desprezível em relação a $V_k^2 B_{kk}$ (aproximação c), levando a:

$$L'_{kk} \cong B''_{kk} = -\sum_{m\in\Omega_k} b_{km} - (b_k^{sh} + \sum_{m\in\Omega_k} b_{km}^{sh}) \qquad (5.61)$$

significando que, no cálculo de B''_{kk}, deve entrar a soma de todas as susceptâncias (série e shunt) ligadas à barra k.

Em algumas aplicações, como é o caso dos equivalentes externos (*ver o Cap.* 7), em que aparecem elementos *shunt* com altas susceptâncias, a potência reativa gerada ou consumida nesse elemento poderá atingir valores pouco usuais. Nessas situações, em geral, a aproximação c não é válida, ou seja, a magnitude de Q_k pode ser não-desprezível em relação a $V_k^2 B_{kk}$. O efeito prático da não validade dessa aproximação, nos casos mencionados, pode ser a convergência lenta, ou mesmo a divergência do método desacoplado rápido, em sua versão original. A solução desse problema é ao mesmo tempo trivial e muito eficiente, como se verá a seguir. Explicitando-se a injeção de potência reativa Q_k, na Eq. (5.60), chega-se a:

$$L'_{kk} = -2(b_k^{sh} + \sum_{m\in\Omega_k} b_{km}^{sh}) - \sum_{m\in\Omega_k}\left[b_{km} + b_{km}\left(1 - \frac{V_m}{V_k}\cos\theta_{km}\right) + \frac{V_m}{V_k} g_{km}\,\text{sen}\,\theta_{km}\right] \qquad (5.62)$$

Essa expressão pode ser aproximada por

$$L'_{kk} \cong B''_{kk} = -\sum_{m\in\Omega_k} b_{km} - 2(b_k^{sh} + \sum_{m\in\Omega_k} b_{km}^{sh}) \qquad (5.63)$$

bastando considerar-se que:

$$\left| b_{km}\left(1 - \frac{V_m}{V_k}\cos\theta_{km}\right)\right| \ll |\, b_{km}\,| \qquad (5.64)$$

$$\left| \frac{V_m}{V_k}\, g_{km}\,\mathrm{sen}\,\theta_{km}\right| \ll |\, b_{km}\,|$$

o que equivale a aproximarem-se V_k e V_m pela unidade e a aplicarem-se as aproximações *a* e *b* utilizadas na obtenção da versão original do método. Observe-se, ainda, que a aproximação (5.63) poderia ser obtida calculando-se L'_{kk} no ponto $V = 1$ e $\theta = 0$. A Eq. (5.63) estabelece que, na versão modificada do método desacoplado rápido, o elemento B''_{kk} da matriz B'' contém a soma das susceptâncias série mais a soma do dobro das susceptâncias *shunt*. Utilizando-se essa versão é possível resolverem-se, sem dificuldades de convergência, alguns problemas que não poderiam ser resolvidos pela versão original (*ver a Ref.* [16]).

O efeito das aproximações (5.60) e (5.62) na formação da matriz B'' pode ser observado em um problema muito simples, formulado na Fig. 5.8. Esse sistema é formado por uma única barra em que são conhecidos o ângulo da tensão nodal ($\theta = 0$), a injeção de potência ativa ($P = 0$), a injeção de potência reativa ($Q = 8$ p.u.) e a susceptância *shunt* ($b^{sh} = -10$ p.u.). Pretende-se determinar a magnitude da tensão nodal V. Esse problema pode ser resolvido pelo método desacoplado rápido. O sistema de equações a ser resolvido se resume a:

$$Q^{esp} = -\, b^{sh} V^2$$

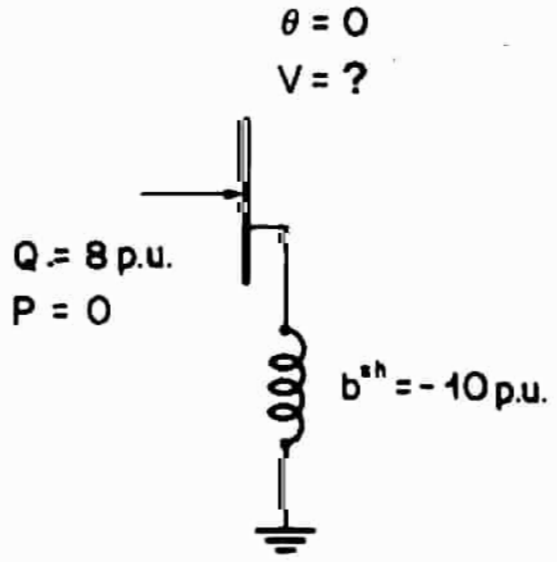


Figura 5.8 — Sistema-exemplo de uma barra

A matriz B'', que é unidimensional, é dada por

$$\text{versão original} \quad B'' = -b^{sh} = 10 \text{ p.u.}$$

$$\text{versão modificada} \quad B'' = -2b^{sh} = 20 \text{ p.u.}$$

Considere-se a estimativa inicial da tensão V como sendo $V^{(0)} = 1$ p.u. A tabela abaixo dá uma idéia da evolução do processo iterativo para as duas versões.

Iteração		$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	Exato
V	Versão original	1,000	0,800	1,000	0,894
	Versão modificada	1,000	0,900	0,894	

Os cálculos correspondentes estão detalhados a seguir.

Versão original

$V^{(0)} = 1$ p.u.

$\Delta Q^{(0)} = Q^{esp} - 10(V^{(0)})^2 = -2$

$\Delta V^{(0)} = (B'')^{-1} \Delta Q^{(0)}/V^{(0)} = -0{,}2$

$V^{(1)} = V^{(0)} + \Delta V^{(0)} = 0{,}800$

$\Delta Q^{(1)} = Q^{esp} - 10(V^{(1)})^2 = 1{,}6$

$\Delta V^{(1)} = (B'')^{-1} \Delta Q^{(1)}/V^{(1)} = 0{,}2$

$V^{(2)} = V^{(1)} + \Delta V^{(1)} = 1$ p.u.

Versão modificada

$V^{(0)} = 1$ p.u.

$\Delta Q^{(0)} = Q^{esp} - 10(V^{(0)})^2 = -2$

$\Delta V^{(0)} = (B'')^{-1} \Delta Q^{(0)}/V^{(0)} = -0{,}1$

$V^{(1)} = V^{(0)} + \Delta V^{(0)} = 0{,}900$

$\Delta Q^{(1)} = Q^{esp} - 10(V^{(1)})^2 = -0{,}1$

$\Delta V^{(1)} = (B'')^{-1} \Delta Q^{(1)}/V^{(1)} = -0{,}0055$

$V^{(2)} = V^{(1)} + \Delta V^{(1)} = 0{,}894$

Problemas

5.1. Considerar um sistema constituído de três barras e três linhas, cujos dados, em p.u., estão tabelados a seguir:
Dados de barras:

Barra	Tipo	P	Q	V	θ
1	$V\theta$	—	—	1,0	0,0
2	PQ	−0,05	−0,02	—	—
3	PV	−0,15	—	0,98	—

Dados de linhas:

Linha	r	x	b^{sh}
1-2	0,10	1,00	0,01
1-3	0,20	2,00	0,02
2-3	0,10	1,00	0,01

a) Montar a matriz $Y = G + jB$, tomando como referência o nó terra.
b) Montar o Subsistema 1 [Eqs. (5.3) e (5.4)].
c) Montar o sistema de equações (5.34).
d) Reescrever o sistema de equações (5.34), obtido no item precedente, considerando-se $V_1 = V_2 = V_3 = 1$ p.u. e $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$.
e) Determinar as matrizes B' e B'', e montar os sistemas de equações (5.57).

5.2. Desenvolver um programa computacional para resolver o Prob. 5.1. pelo método de Newton.

5.2. Desenvolver um programa computacional para resolver o Prob. 5.1 pelo método desacoplado rápido.

Capítulo 6

FLUXO DE CARGA: CONTROLES E LIMITES

No capítulo precedente, foram apresentados os principais métodos de resolução das equações básicas do problema do fluxo de carga. Essas equações, que foram agrupadas nos subsistemas 1 e 2, representam os componentes mais importantes de um sistema de energia elétrica, que são as cargas, geradores e compensadores síncronos (modelados pelas barras tipo *PQ*, *PV* e *V0*), as linhas de transmissão e os transformadores em-fase (representados pelos modelos equivalentes tipo π), os transformadores defasadores, os capacitores e reatores *shunt*. Além desses componentes, um sistema de energia elétrica tem uma série de dispositivos de controle que influem diretamente nas condições de operação e, portanto, devem ser incluídos na modelagem do sistema para que se possa simular corretamente seu desempenho (nunca é demais lembrar que as simulações consideradas aqui são do tipo estático, ou seja, válidas para situações nas quais as variações no tempo são relativamente lentas). À formulação básica do problema de fluxo de carga devem, então, ser incorporadas as equações que representam esses dispositivos de controle bem como as inequações associadas aos limites de operação do sistema. O objetivo deste capítulo é discutir a inclusão desses controles e limites na solução do problema do fluxo de carga. Será apresentada também, ao final do capítulo, a modelagem de cargas funcionais, ou seja, de cargas que variam com a magnitude da tensão das barras correspondentes.

Entre os controles que geralmente são representados em programas de fluxo de carga estão: controle de magnitude de tensão nodal (local e remota) por injeção de reativos; controle de magnitude de tensão nodal por ajuste de *tap* (transformadores em-fase); controle de fluxo de potência ativa (transformadores defasadores); e controle de intercâmbio entre áreas. Os limites de operação mais comuns são: limites de injeção de potência reativa em barras *PV*; limites de tensão em barras *PQ*; limites dos *taps* de transformadores; e limites de fluxos em circuitos.

6.1. *Modos de representação*

Existem basicamente três maneiras de representar os controles mencionados anteriormente:

a) Classificação por tipo de barra (*PQ*, *PV*, *Vθ*, etc.) e o agrupamento das equações correspondentes nos subsistemas 1 e 2. Isso significa que, por exemplo, o controle de tensão em barras *PV* já está representado nas equações básicas do fluxo de carga, pela própria definição de barras *PV*. Este procedimento é utilizado eficientemente tanto com o método de Newton como com os métodos desacoplados.

b) Mecanismos de ajuste executados alternadamente com a solução iterativa do Subsistema 1, ou seja, durante o cálculo de uma iteração as variáveis de controle permanecem inalteradas e, entre uma iteração e outra, essas variáveis são reajustadas procurando-se fazer que as variáveis controladas se aproximem cada vez mais dos respectivos valores especificados.

c) Incorporação de equações e variáveis adicionais ao Subsistema 1 ou substituição de equações e variáveis dependentes desse subsistema por novas equações e/ou variáveis. Por exemplo, um transformador defasador puro, cuja variável de controle é o ângulo φ_{km} e a variável controlada é o fluxo de potência ativa P_{km} (*ver o modelo dado pela Fig.* 1.6), pode ser representado por uma equação adicional anexada ao Subsistema 1 ($P_{km}^{esp} - P_{km}^{cal} = 0$) e pela incógnita φ_{km} agregada ao vetor de variáveis dependentes $\underline{x}$ (*ver a Eq.* 5.7). Por outro lado, um transformador em-fase – cuja variável de controle é a relação de transformação a_{km} e a variável controlada é, por exemplo, a magnitude de tensão V_m (*ver o modelo dado pela Fig.* 1.4) – pode ser representado pela simples alteração do vetor de variáveis dependentes $\underline{x}$, no qual a magnitude da tensão controlada V_m é substituída pela relação de transformação a_{km}, mantendo-se inalterado o conjunto de equações do Subsistema 1. Esse procedimento, em geral, apresenta bons resultados quando aplicado ao método de Newton, apesar de exigir alguns cuidados adicionais para o cálculo da matriz jacobiana.

Em relação ao processo de resolução das equações básicas do fluxo de carga [*ver as Eqs.* (5.3) *e* (5.6)], a introdução da representação de controles automáticos traz algumas complicações adicionais que devem ser observadas [12]. A convergência do processo iterativo geralmente fica mais lenta. A interferência entre controles que são eletricamente próximos pode levar, em algumas situações, à não-convergência do processo iterativo. Além disso, a ocorrência de soluções múltiplas para um mesmo problema torna-se bastante freqüente quando os dispositivos de controle são incluídos na modelagem do sistema.

6.2. *Ajustes alternados* [10]

O procedimento de ajustes iterativos, efetuados alternadamente com as iterações do processo de resolução do Subsistema 1, objetiva manter a variável controlada z em um valor especificado z^{esp}, corrigindo-se convenientemente a variável de controle u:

$$\Delta u = \alpha \Delta z = \alpha(z^{esp} - z^{cal}) \tag{6.1}$$

em que Δu é a correção na variável de controle; Δz é o erro na variável controlada (valor especificado menos valor calculado); e α é a relação de sensibilidade entre as variáveis u e z.

O esquema geral do procedimento de ajuste é descrito a seguir:

i) Definir os valores iniciais das variáveis de controle $u = u^0$.

ii) Obter uma solução inicial do Subsistema 1, que fornece o estado do sistema. Essa solução pode ser obtida com tolerâncias maiores que as exigidas da solução final ou, então, com um certo número prefixado de iterações.

iii) Estimar os valores atuais das variáveis controladas z^{cal} e verificar se os erros Δz já estão dentro das tolerâncias especificadas; dependendo dos erros ΔP e ΔQ das equações do Subsistema 1, o processo iterativo pode já estar terminado; se não estiver, ir para *iv*.

iv) Determinar os novos valores das variáveis de controle utilizando-se das relações do tipo (6.1), avaliando-se previamente, quando necessário, os fatores de sensibilidade α.

v) Efetuar mais uma iteração (método de Newton ou desacoplado) no processo de resolução do Subsistema 1 e voltar ao passo *iii*.

A convergência desse processo iterativo depende tanto da evolução dos controles (Eq. 6.1) quanto da resolução do Subsistema 1, sendo que, em geral, são os controles que determinam a convergência do processo como um todo. Isso será tão mais verdadeiro quanto maior o número e a variedade de controles e limites representados. Deve-se notar, finalmente, que o efeito dos dispositivos de controle e os limites de operação só devem ser incorporados ao processo iterativo de resolução após ter sido obtida uma convergência parcial na resolução do Subsistema 1. Com isso evitam-se problemas como a atuação indevida de dispositivos de controle e violações de limites motivadas pela escolha de valores iniciais muito distantes do ponto solução.

6.3. *Controle de tensão em barras PV* [12]

Nas barras de geração e nas barras em que são ligados compensadores síncronos, o controle da magnitude da tensão nodal é feito pelo ajuste da corrente de campo de máquinas síncronas, que podem operar sobre ou subexcitadas, injetando ou absorvendo reativos da rede de transmissão; o mesmo tipo de controle pode ser conseguido também pela atuação de dispositivos estáticos. Conforme já foi mencionado na Sec. 6.1, a representação desse tipo de controle está embutida na própria formulação básica do problema do fluxo de carga, pela definição das barras *PV*. As equações das injeções de potência reativa Q_k nas barras *PV* não aparecem no Subsistema 1 e, sim, no Subsistema 2 (*ver o Cap. 5*); por outro lado, a magnitude de tensão V_k é mantida igual a seu valor especificado V_k^{esp}. O fato de Q_k não estar no Subsistema 1 e de V_k ser constante implica que a matriz jacobiana não contém as linhas cujos elementos seriam $\partial Q_k/\partial \theta_m$ e $\partial Q_k/\partial V_m$, e as colunas correspondentes às derivadas $\partial P_m/\partial V_k$ e $\partial Q_m/\partial V_k$. Situação análoga é observada em relação à matriz B'' do método desacoplado rápido que, como se sabe, nada mais é que uma aproximação da submatriz jacobiana L.

Como atua o mecanismo de controle de tensão em uma barra *PV*, em um programa de cálculo de fluxo de carga? Para responder a essa pergunta, considere-se uma barra *PV* na qual $V_k = V_k^{esp}$ e, inicialmente, $Q_k^{min} < Q_k^{cal} < Q_k^{max}$. Imagine-se, por exemplo, que, a cada iteração, aumente a injeção de reativos Q_k^{cal} necessária para manter a tensão no valor especificado até que o limite Q_k^{max} seja atingido. A partir daí, a tensão V_k tenderá a cair devido à insuficiência de suporte de potência reativa. Raciocínio análogo vale quando é atingido o limite Q_k^{min}, caso em que a magnitude de tensão V_k tenderá a subir. As injeções de potência reativa nas barras *PV* devem, portanto, ser recalculadas ao final de cada iteração utilizando-se os valores atualizados do estado da rede, para observar-se se esses valores estão dentro dos limites especificados ou não. Se Q_k^{cal} cair fora dos limites, os tipos das barras nas quais isso ocorre são redefinidos, passando de *PV* para *PQ*, com injeções de reativos especificadas no limite violado ($Q_k^{esp} = Q_k^{lim}$); ao mesmo tempo, as magnitudes V_k das tensões dessas barras são liberadas, passando a ser calculadas a cada iteração, como parte do vetor das variáveis dependentes $\underline{x}$. Quando ocorre uma dessas mudanças de tipo de barra (de *PV* para *PQ*), devem ser reinseridas na matriz jacobiana as linhas que contêm as derivadas $\partial Q_k/\partial \theta_m$ e $\partial Q_k/\partial V_m$, e as colunas correspondentes às derivadas em relação a V_k, isto é, $\partial P_m/\partial V_k$ e $\partial Q_m/\partial V_k$. A mesma observação vale em relação à matriz B''. Essas alterações na matriz jacobiana e em B'' decorrem das próprias mudanças no Subsistema 1.

Após uma barra *PV* ter sido transformada em *PQ*, deve-se testar, a cada iteração subseqüente, a possibilidade de essa barra voltar a seu tipo original. Considere-se, por exemplo, um caso em que a injeção de

reativos esteja fixada no limite máximo, ou seja, $Q_k^{esp} = Q_k^{max}$. A variável V_k correspondente, recalculada a cada iteração, poderá ser maior, menor ou igual ao valor especificado V_k^{esp}. Se $V_k^{cal} < V_k^{esp}$, nada se altera, pois, para se aumentar a magnitude de tensão V_k^{cal}, dever-se-ia aumentar a injeção de reativos na barra, o que seria impossível já que $Q_k^{esp} = Q_k^{max}$. Entretanto, se $V_k^{cal} > V_k^{esp}$, para se diminuir a magnitude de tensão V_k^{cal}, basta que a injeção de reativos na barra seja diminuída, o que é perfeitamente viável, pois $Q_k^{esp} = Q_k^{max}$. Isso significa que, se $Q_k^{esp} = Q_k^{max}$ e $V_k^{cal} > V_k^{esp}$, a barra poderá ser reconvertida a seu tipo original, ou seja, ao tipo *PV*. Por raciocínio análogo, chega-se à conclusão de que isso também é possível quando $Q_k^{esp} = Q_k^{min}$ e $V_k^{cal} < V_k^{esp}$ (*ver Probl.* 6.5, *proposto ao final deste capítulo*).

6.4. *Limites de tensão em barras PQ* [10, 12]

Para alguns estudos de planejamento da operação e da expansão de um sistema de energia elétrica, é muito conveniente que os programas de fluxo de carga limitem a variação da magnitude das tensões das barras *PQ* dentro de uma faixa especificada, mesmo que nessas barras não existam realmente dispositivos de controle capazes de realizar tal tarefa. Por exemplo, em estudos sobre a expansão a longo prazo da rede de transmissão, é comum determinar-se inicialmente uma (ou mais) rede de transmissão que atenda aos requisitos de geração/demanda, utilizando-se um modelo simplificado da rede (fluxo de carga CC, modelo de transportes, etc.). Em uma fase subseqüente dos estudos, devem ser avaliados o desempenho reativo e o perfil de tensões da rede que está sendo planejada, e para tanto são utilizados métodos convencionais de fluxo de carga CA. Nesses casos, devido ao fato de o planejamento reativo ainda não ter sido feito, são comuns situações nas quais não se consegue convergência. A limitação das magnitudes das tensões dentro de uma faixa especificada ($\pm 10\%$ em torno dos valores nominais, por exemplo) permite em geral que se obtenha a convergência e, além disso, ter-se uma indicação das barras nas quais existem problemas de suporte de potência reativa (barras cujas magnitudes de tensão estão fixadas no limite).

Em um programa de cálculo de fluxo de carga, as magnitudes das tensões das barras *PQ* são recalculadas a cada iteração durante o processo de resolução do Subsistema 1. Quando o valor calculado de V_k cai fora dos limites V_k^{min} e V_k^{max}, o tipo da barra na qual ocorre a violação é redefinido, passando de *PQ* para *PV*, com magnitude de tensão especificada no limite violado ($V_k^{esp} = V_k^{lim}$); ao mesmo tempo, a injeção de reativo Q_k nessa barra é liberada, passando a ser recalculada a cada iteração. Considere-se, por exemplo, que a magnitude da tensão seja especificada no valor mínimo, ou seja, $V_k^{esp} = V_k^{min}$. Neste caso, na iteração

em que ocorre a fixação no limite, o valor calculado da injeção de reativos na barra será $Q_k^{cal} = Q_k^{esp} + \Delta Q_k$, em que ΔQ_k é um valor positivo (correspondendo, por exemplo, a um capacitor ligado à barra para impedir que a magnitude da tensão nodal caia abaixo do mínimo permitido). Analogamente, quando a violação ocorre no limite superior, isto é, $V_k^{esp} = V_k^{max}$, o incremento ΔQ_k na injeção de reativos será negativo (correspondendo, por exemplo, a um indutor *shunt* ligado à barra para impedir que a magnitude da tensão nodal suba acima do máximo permitido).

Quando V_k é fixado em um de seus valores-limites, essa variável deve ser removida do vetor das variáveis dependentes $\underline{x}$ enquanto a equação de resíduo $Q_k^{esp} - Q_k^{cal} = 0$ correspondente sai do Subsistema 1. Note-se que o decréscimo do número de equações que formam o Subsistema 1 é igual à redução no número de incógnitas. Como decorrência das alterações no Subsistema 1, quando ocorre essa mudança de tipo de barra (de *PQ* para *PV*), devem-se remover da matriz jacobiana a linha que contém as derivadas $\partial Q_k/\partial \theta_m$ e $\partial Q_k/\partial V_m$, e a coluna correspondente às derivadas em relação a V_k, isto é, $\partial P_m/\partial V_k$ e $\partial Q_m/\partial V_k$. Comentário análogo vale para a matriz B'' do método desacoplado rápido.

Após uma barra *PQ* ter sido transformada em *PV*, deve-se testar, a cada iteração subseqüente, a possibilidade de essa barra voltar a seu tipo original. Considere-se, por exemplo, que a magnitude da tensão esteja fixada no limite mínimo, isto é, $V_k^{esp} = V_k^{min}$. A variável Q_k correspondente, recalculada a cada iteração, poderá ser maior, menor ou igual ao valor especificado Q_k^{esp}. Se $Q_k^{cal} > Q_k^{esp}$, nada se altera, pois a injeção extra de reativos, ou seja, $\Delta Q_k = Q_k^{cal} - Q_k^{esp} > 0$, é indispensável para não deixar a magnitude de tensão V_k cair abaixo de V_k^{min}. Entretanto, se $Q_k^{cal} < Q_k^{esp}$, a injeção incremental ΔQ_k será negativa, significando que, se ela for eliminada, a magnitude de tensão V_k aumentará, entrando na faixa permitida. Isso significa que, se $V_k^{esp} = V_k^{min}$ e $Q_k^{cal} < Q_k^{esp}$, a barra poderá ser reconvertida a seu tipo original, isto é, ao tipo *PQ*. Por raciocínio análogo, chega-se à conclusão de que isso também é possível quando $V_k^{esp} = V_k^{max}$ e $Q_k^{cal} > Q_k^{esp}$ (*ver Prob.* 6.6, *proposto ao final deste capítulo*).

6.5. *Transformadores em-fase com controle automático de tap* [10, 11]

Os transformadores com controle automático de *tap* podem ser utilizados na regulação de magnitudes de tensões nodais. No Cap. 1 foi apresentada uma discussão detalhada sobre a modelagem de transformadores e foi analisado o efeito da relação de transformação sobre as magnitudes das tensões terminais do transformador. Nesta seção será estudada a inclusão do efeito dos transformadores com *tap* variável no processo iterativo de resolução das equações do fluxo de carga.

Considere-se um transformador em-fase com terminais *k* e *m* (*ver a Fig.* 1.4), cuja relação de transformação a_{km} deve ser variada para con-

trolar a magnitude V_m de uma das tensões terminais. Conforme foi demonstrado no Cap. 1, os fluxos de potência em um transformador em-fase obedecem ao mesmo tipo de equação que os fluxos em uma linha de transmissão, com a única diferença de que, em lugar de V_k, aparece $a_{km}V_k$:

$$\begin{aligned} P_{km} &= (a_{km}V_k)^2 g_{km} - (a_{km}V_k)\,V_m g_{km}\cos\theta_{km} - (a_{km}V_k)\,V_m b_{km}\operatorname{sen}\theta_{km} \\ Q_{km} &= -(a_{km}V_k)^2 b_{km} + (a_{km}V_k)\,V_m b_{km}\cos\theta_{km} - (a_{km}V_k)\,V_m g_{km}\operatorname{sen}\theta_{km} \end{aligned} \tag{6.2}$$

A relação de sensibilidade

$$\Delta a_{km} = \alpha \Delta V_m \tag{6.3}$$

pode ser utilizada na determinação da correção Δa_{km} a ser introduzida na variável de controle a_{km} objetivando corrigir o erro

$$\Delta V_m = V_m^{esp} - V_m^{cal} \tag{6.4}$$

em que V_m^{esp} é o valor especificado e V_m^{cal} é o valor calculado na iteração mais recente. Se a barra k, que é o terminal oposto do transformador, for rigida, ou seja, se a magnitude de tensão V_k for pouco suscetível às variações da relação de transformação a_{km}, então o fator de sensibilidade α será aproximadamente unitário.

Já foi mencionado anteriormente que os métodos desacoplados introduzem aproximações na matriz jacobiana, mas não no cálculo dos resíduos $\Delta\underline{P}$ e $\Delta\underline{Q}$. No método desacoplado rápido, por exemplo, além do desacoplamento da matriz jacobiana, trabalha-se com as matrizes constantes B' e B'' (calculadas no ponto $V = 1$ p.u. e $\theta = 0$) durante todo o processo iterativo, mas no cálculo de $\Delta\underline{P}$ e $\Delta\underline{Q}$ são utilizados, a cada iteração, os valores atualizados de $\underline{V}$ e $\underline{\theta}$. Como se sabe, esta é a razão de o método desacoplado rápido apresentar a mesma solução final que o método de Newton, apesar de ter convergência distinta. No que se refere aos transformadores com *tap*-variável, segue-se o mesmo tipo de política, isto é, na formação de B' e B'' considera-se sempre $a_{km} = a_{km}^0$, enquanto no cálculo dos resíduos $\Delta\underline{P}$ e $\Delta\underline{Q}$ utilizam-se os valores atualizados de a_{km}.

Em vez de se utilizar o procedimento de o es alternadas, descrito anteriormente, pelo qual as correções nas variáveis de controle [Eq. (6.3)] são intercaladas ao processo iterativo de resolução do Subsistema 1, pode-se alterar o próprio Subsistema 1 de tal forma a incluir-se diretamente a representação do efeito de transformadores automáticos. Considere-se novamente o transformador de terminais k e m representado na Fig. 1.4, em que a variável de controle a_{km} regula a magnitude de tensão V_m. A barra m passa a ser classificada como sendo do tipo PQV, isto é, as variáveis P_m, Q_m e V_m são especificadas. Com isso, o Subsistema 1 fica com uma incógnita a menos (V_m), que é então substituída no vetor $\underline{x}$

de variáveis dependentes pela relação de transformação a_{km}. Esquematicamente, a matriz jacobiana passa a ter a seguinte forma geral:

$$\begin{matrix} NPQ \\ + \\ NPV \\ + \\ NPQV \\ NPQ \\ + \\ NPQV \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \Delta \underline{P} \\ \Delta \underline{Q} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} \dfrac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{\theta}} & \dfrac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{V}} & \dfrac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{a}} \\ \dfrac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{\theta}} & \dfrac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{V}} & \dfrac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{a}} \end{matrix} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \Delta \underline{\theta} \\ \Delta \underline{V} \\ \Delta \underline{a} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} NPQ \\ + \\ NPV \\ + \\ NPQV \\ NPQ \\ NT = NPQV \end{matrix} \tag{6.5}$$

em que NPQ é o número de barras PQ; NPV é o número de barras PV; NT é o número de transformadores com controle automático de *tap*; e $NPQV$ é o número de barras PQV [por simplicidade de exposição, na Eq. (6.5), foi feita a suposição de que todas as barras PQV têm suas tensões reguladas por transformadores, ou seja $NT = NPQV$]. As derivadas $\partial \underline{P}/\partial \underline{a}$ e $\partial \underline{Q}/\partial \underline{a}$, que aparecem na Eq. (6.5), são análogas às derivadas $\partial \underline{P}/\partial \underline{V}$ e $\partial \underline{Q}/\partial \underline{V}$, e podem ser facilmente obtidas a partir das Eqs. (6.2).

6.6. *Transformadores defasadores com controle automático de fase*

Esse tipo de transformador pode ser utilizado para regular o fluxo de potência ativa nos ramos onde são inseridos. Conforme foi demonstrado no Cap. 1, os fluxos de potência através de um defasador puro ($t_{km} = e^{j\varphi_{km}}$) obedecem ao mesmo tipo de equação que os fluxos em uma linha de transmissão, com a única diferença de que, em vez da abertura angular θ_{km}, aparece o ângulo $\theta_{km} + \varphi_{km}$, em que φ_{km} é a fase do defasador (*ver a Fig.* 1.6):

$$\begin{aligned} P_{km} &= V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - V_k V_m b_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) \\ Q_{km} &= -V_k^2 b_{km} + V_k V_m b_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - V_k V_m g_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

A simulação do controle do fluxo de potência ativa através do defasador pode ser feita utilizando-se a relação de sensibilidade

$$\Delta \varphi_{km} = \chi \Delta P_{km} \tag{6.7}$$

em que $\Delta \varphi_{km}$ é a correção introduzida na variável de controle φ_{km} e ΔP_{km} é o erro

$$\Delta P_{km} = P_{km}^{esp} - P_{km}^{cal} \tag{6.8}$$

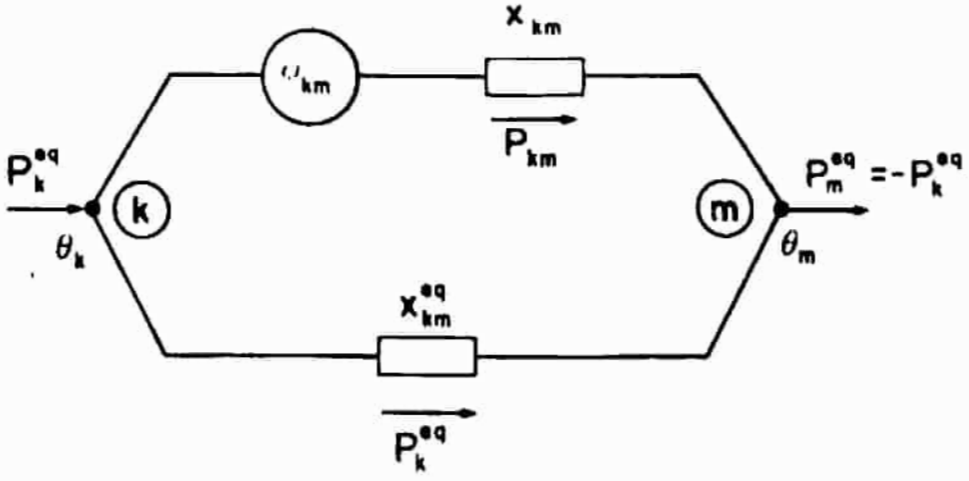


Figura 6.1 – Equivalente reduzido de uma rede utilizado na análise da atuação de um defasador puro

sendo P_{km}^{esp} o valor especificado do fluxo no defasador e P_{km}^{cal} o valor calculado na iteração mais recente.

O significado do fator de sensibilidade α pode ser mais bem entendido pela análise do circuito equivalente linearizado da Fig. 6.1, no qual a rede foi reduzida aos dois nós terminais do defasador. O equivalente é caracterizado por dois parâmetros: a reatância equivalente x_{km}^{eq} e as injeções equivalentes P_k^{eq} e P_m^{eq} (*ver o Cap. 7 sobre equivalentes*). Note-se que x_{km}^{eq} é a reatância equivalente entre os nós k e m, excluindo-se o defasador (*para mais detalhes sobre o cálculo da reatância equivalente ver a última seção do Cap. 1*). As duas leis de Kirchhoff aplicadas ao circuito da Fig. 6.1 resultam em:

$$P_k^{eq} = P_{km} + P_{km}^{eq} = \text{constante} \tag{6.9}$$

$$\varphi_{km} - x_{km} P_{km} + x_{km}^{eq} P_{km}^{eq} = 0 \tag{6.10}$$

Utilizando-se a Eq. (6.9) para eliminar o fluxo P_{km}^{eq} da Eq. (6.10), obtém-se:

$$\varphi_{km} - (x_{km} + x_{km}^{eq})\, P_{km} + x_{km}^{eq} P_k^{eq} = 0 \tag{6.11}$$

Seja ΔP_{km} a alteração provocada no fluxo P_{km} pela correção $\Delta\varphi_{km}$ no ângulo do defasador; da relação (6.11) chega-se a

$$\Delta\varphi_{km} - (x_{km} + x_{km}^{eq})\, \Delta P_{km} = 0 \tag{6.12}$$

ou seja, o fator de sensibilidade α é dado por

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi_{km}}{\Delta P_{km}} = x_{km} + x_{km}^{eq} \tag{6.13}$$

Esse fator pode ser interpretado da seguinte maneira. Se, além do defasador, existirem caminhos alternativos de baixa reatância entre os nós k e m, a reatância equivalente x_{km}^{eq} será pequena, o que implica um α próximo a x_{km}, ou seja, α será pequeno. Neste caso, uma pequena variação na variável de controle φ_{km} será suficiente para produzir uma alteração significativa no fluxo P_{km}. Por outro lado, se o único caminho entre k e m for pelo próprio defasador ($x_{km}^{eq} = x$) ou, se os caminhos paralelos apresentarem reatâncias muito elevadas ($x_{km}^{eq} \gg x_{km}$), então P_{km} será insensível, ou praticamente insensível, às variações de φ_{km}.

Da mesma forma que ocorre com os transformadores em-fase, em vez de se efetuarem as correções dadas pela Eq. (6.7), pode-se representar o efeito dos transformadores defasadores redefinindo-se o Subsistema 1: para cada defasador é incluída uma nova equação ($P_{km}^{esp} - P_{km} = 0$) e uma nova variável dependente (φ_{km}), ou seja, o Subsistema 1 fica acrescido de uma equação e uma incógnita [11]. Esquematicamente, a matriz jacobiana passa a ser (para maior facilidade de representação, os únicos dispositivos de controle representados são os defasadores):

$$\begin{matrix} \\ \\ ND \end{matrix} \left\{ \begin{bmatrix} \Delta \underline{P} \\ \Delta \underline{Q} \\ \Delta \underline{P}_D \end{bmatrix} \right. = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{V}} & \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{\varphi}} \\ \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{V}} & \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{\varphi}} \\ \frac{\partial \underline{P}_D}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \underline{P}_D}{\partial \underline{V}} & \frac{\partial \underline{P}_D}{\partial \underline{\varphi}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{\theta} \\ \Delta \underline{V} \\ \Delta \underline{\varphi} \end{bmatrix} \left. \right\} \begin{matrix} \\ \\ ND \end{matrix} \tag{6.14}$$

em que ND é o número de defasadores; $\Delta \underline{P}_D$ é um vetor de resíduos cujos componentes são $P_{km}^{esp} - P_{km}^{cal}$; e $\Delta \underline{\varphi}$ é o vetor das correções nos ângulos de controle φ_{km}. As derivadas $\partial \underline{P}/\partial \underline{\varphi}$, $\partial \underline{Q}/\partial \underline{\varphi}$, $\partial \underline{P}_D/\partial \underline{\theta}$, $\partial \underline{P}_D/\partial \underline{V}$ e $\partial \underline{P}_D/\partial \underline{\varphi}$ podem ser facilmente obtidas a partir das Eqs. (6.6).

6.7. *Controle de intercâmbio entre áreas* [10, 11]

Em uma rede interligada é necessário que sejam controlados os intercâmbios de potência ativa entre as várias áreas que compõem o sistema. Em uma rede com NA áreas são controlados os intercâmbios de NA-1 áreas, pois o intercâmbio de uma delas fica definido pelas de-

mais (primeira lei de Kirchhoff). O intercâmbio líquido de potência ativa de uma área é definido como a soma algébrica dos fluxos nas linhas e nos transformadores que interligam essa área com as demais (as exportações são consideradas positivas e as importações, negativas). A cada área do sistema é associada uma barra de folga (*slack*), sendo que a barra de folga de uma das áreas funciona também como barra de folga do sistema (em geral é uma barra do tipo $V\theta$, que serve também como referência angular para o sistema). Com exceção da barra de folga do sistema, as injeções de potência ativa nas barras de folga das demais áreas são ajustadas para manter os intercâmbios líquidos dessas áreas nos valores especificados. Note-se que o controle de intercâmbio regula o intercâmbio total de uma área, ou seja, mantém em um valor especificado a soma algébrica dos intercâmbios individuais nas linhas e nos transformadores que interligam a área com o resto do sistema. Se, além do intercâmbio líquido, for necessário o controle do fluxo de potência ativa em uma ligação específica, deve-se utilizar um transformador defasador (obviamente, este comentário deixa de valer se a ligação for radial).

Uma maneira de se considerar o controle de intercâmbio entre áreas consiste em intercalarem-se as correções dadas pela relação de sensibilidade (6.1) entre duas iterações consecutivas do processo iterativo de resolução do Subsistema 1. Neste caso, a Eq. (6.1) assume a forma

$$\Delta PF_i = \Delta PI_i \tag{6.15}$$

em que $\alpha = 1$; ΔPF_i é a correção na geração da barra de folga da área i; e ΔPI_i é o erro no intercâmbio líquido da barra i, dado por

$$\Delta PI_i = PI_i^{esp} - PI_i^{cal} \tag{6.16}$$

sendo PI_i^{esp} o valor especificado para o intercâmbio da área i; e PI_i^{cal}, o valor calculado na iteração mais recente.

A representação do controle de intercâmbio entre áreas também pode ser feito por alterações introduzidas no Subsistema 1, conforme será visto a seguir. As barras de folga das áreas, com exceção da barra de folga do sistema (barra $V\theta$), são classificadas como do tipo V (só as magnitudes das tensões nodais são especificadas), ou seja, as injeções de potência ativa nessas barras deixam de ser especificadas e as equações dos resíduos correspondentes ($P_k^{esp} - P_k^{cal} = 0$) saem do Subsistema 1 e P_k passa a ser calculada no Subsistema 2: no lugar dessa equação é introduzida a equação de intercâmbio da área ($PI_i^{esp} - PI_i^{cal} = 0$), mantendo-se dessa forma a igualdade entre o número de equações e incógnitas do Subsistema 1. Note-se que o conjunto de variáveis dependentes continua o mesmo. Esquematicamente, a matriz jacobiana passa a ser:

$$\begin{matrix} NPQ \\ + \\ NPV \end{matrix}\left\{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right. \begin{bmatrix} \Delta \underline{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{V}} & \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{\theta}_F} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{\theta} \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} NPQ \\ + \\ NPV \end{matrix}$$

$$NPQ\left\{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right. \begin{bmatrix} \Delta \underline{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{V}} & \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{\theta}_F} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{V} \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} NPQ \qquad (6.17)$$

$$NV\left\{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right. \begin{bmatrix} \Delta \underline{PI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{PI}}{\partial \underline{\theta}} & \frac{\partial \underline{PI}}{\partial \underline{V}} & \frac{\partial \underline{PI}}{\partial \underline{\theta}_F} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{\theta}_F \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} NV = NA - 1$$

em que NV é o número de barras tipo V e NA é o número de áreas [visando a simplificar a apresentação, o único tipo de controle representado na Eq. (6.17) é o controle de intercâmbio entre áreas]. A expressão algébrica que dá o intercâmbio PI_i, da área i, em função do estado dos nós terminais das interligações, é análoga à expressão da injeção de potência em uma barra – a única diferença é que a equação de intercâmbio expressa a lei de Kirchhoff em uma área em vez de um nó. Deve-se observar que é possível o aparecimento de zeros na diagonal principal da submatriz $\partial PI/\partial \underline{\theta}_F$; isso ocorre sempre que a barra de folga não é terminal de nenhuma interligação (linha ou transformador). A existência de zeros na diagonal principal pode trazer algumas dificuldades durante o pivoteamento. Existem duas alternativas para se evitar esse tipo de dificuldade: deixando-se para pivotear por último as linhas e as colunas correspondentes ao controle de intercâmbio, conforme se indica na Eq. (6.17); ou utilizando-se esquemas especiais de numeração das equações, conforme se sugere na Ref. [11].

6.8. *Controle de tensão em barras remotas* [11, 12]

Esse tipo de controle pode ser executado tanto por transformadores em-fase como por injeção de reativos. No caso do controle por transformadores automáticos, a única diferença em relação ao que foi visto na Sec. 6.5 é que a barra cuja tensão é controlada não é um dos terminais do transformador. Dessa forma, no essencial, continuam válidas todas as observações feitas naquela seção, inclusive a Eq. (6.5).

O controle remoto de magnitude de tensão por injeção de reativos apresenta algumas diferenças em relação ao caso em que a injeção de reativos é utilizada para controlar a tensão da própria barra (ver a Sec. 6.3). A barra de controle é classificada como do tipo P (só a injeção de potência ativa P_k é especificada), enquanto a barra cuja magnitude de tensão é controlada, é classificada como do tipo PQV (P_k, Q_k e V_k são especificados). Uma barra do tipo P é representada no Subsistema 1 por

uma equação ($P_k^{esp} - P_k^{cal} = 0$); uma barra tipo PQV contribui com duas equações ($P_k^{esp} - P_k^{cal} = 0$ e $Q_k^{esp} - Q_k^{cal} = 0$). Por outro lado, a uma barra do tipo P estão associadas duas incógnitas (V_k, θ_k) do Subsistema 1 e a uma barra do tipo PQV corresponde uma única incógnita (θ_k). Dessa forma, um par formado por uma barra do tipo P (barra de controle) e uma barra do tipo PQV (barra controlada) contribui para o Subsistema 1 com três equações e três incógnitas (lembrar que cada barra PQ entra com duas equações e duas incógnitas enquanto uma barra PV contribui com uma equação e uma incógnita). Partindo-se da matriz jacobiana do problema básico e considerando-se a inclusão do controle remoto de magnitude de tensão por injeção de reativos, chega-se a

$$\begin{matrix} NPQV \\ + \\ NPQ \\ + \\ NPV \\ + \\ NP \\ \\ NPQV \\ + \\ NPQ \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right. \begin{bmatrix} \Delta \underline{P} \\ \\ \Delta \underline{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{\theta}} & \dfrac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{V}} \\ \\ \dfrac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{\theta}} & \dfrac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{V}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{\theta} \\ \\ \Delta \underline{V} \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} NPQ \\ + \\ NPQ \\ + \\ NPV \\ + \\ NP \\ \\ NPQ \\ + \\ NP \end{matrix} \tag{6.18}$$

em que $NP = NPQV$ é igual ao número de barras com controle remoto de tensão.

6.9. *Cargas variáveis com a tensão* [10]

A representação de cargas por injeções constantes de potência ativa e reativa nem sempre corresponde ao comportamento real do sistema. A rigor, a modelagem por injeção de potência constante só seria inteiramente correta se as magnitudes das tensões nodais das cargas permanecessem iguais aos respectivos valores nominais. Entretanto, em algumas aplicações do cálculo do fluxo de carga, como é o caso dos programas de análise de estabilidade transitória, a modelagem das cargas tem efeito direto sobre os resultados; a modelagem por potência constante (independente da tensão) é, em geral, mais crítica que a modelagem por admitância constante (a carga varia com o quadrado da magnitude da tensão). Nesse tipo de aplicação, freqüentemente são observados casos estáveis classificados como instáveis, simplesmente porque não foram consideradas as variações das cargas com as magnitudes das tensões.

Um modelo geral para cargas ativas e reativas é dado pelas expressões:

$$P_k^{esp} = (a_p + b_p V_k + c_p V_k^2)\, P_k^{nom}$$
$$Q_k^{esp} = (a_q + b_q V_k + c_q V_k^2)\, Q_k^{nom} \qquad (6.19)$$

em que $a + b + c = 1$, ou seja, para $V_k = 1$ p.u., as cargas P_k^{esp} e Q_k^{esp} assumem os valores nominais P_k^{nom} e Q_k^{nom}. Essa alteração na definição das cargas provoca algumas pequenas mudanças na montagem da matriz jacobiana, pois agora P_k^{esp} e Q_k^{esp} deixam de ser constantes e passam a ser funções de V_k. São afetados os elementos N_{kk} e L_{kk} das submatrizes N e L, que, em lugar das Eqs. (5.40) e (5.42) passam a ser dados por:

$$N_{kk} = -(b_p + 2c_p V_k)\, P_k^{nom} + V_k^{-1}(P_k + V_k^2 G_{kk}) \qquad (6.20)$$

$$L_{kk} = -(b_q + 2c_q V_k)\, Q_k^{nom} + V_k^{-1}(Q_k - V_k^2 B_{kk}) \qquad (6.21)$$

em que P_k e Q_k são os valores calculados em função da estimativa mais recente do estado da rede, durante o processo iterativo de resolução das equações do fluxo de carga.

Problemas

6.1. No sistema utilizado no Prob. 5.1, do capítulo precedente, a linha 1-2 é substituída por um transformador em-fase, com controle automático de *tap*, cujo modelo é dado pela Fig. 1.4 ($k = 1$, $m = 2$, $r_{1,2} = 0$ e $x_{1,2} = 1$ p.u.). Esse transformador é utilizado para regular a magnitude da tensão da barra 2 no valor $V_2^{esp} = 1$p.u.. Pede-se para montar o sistema de equações (6.5).

6.2. Estender o programa de cálculo de fluxo de carga pelo método de Newton, desenvolvido no Prob. 5.2, para resolver o Prob. 6.1. Desenvolver duas versões:
   a) Utilizando a Eq. (6.5).
   b) Utilizando o procedimento de ajustes alternados dado pela Eq. (6-3).

6.3. No sistema utilizado no Prob. 5.1, do capítulo precedente, a linha 1-2 é substituída por um transformador defasador, com controle automático de *tap*, cujo modelo é dado pela Fig. 1.6 ($k = 1$, $m = 2$, $r_{1,2} = 0$ e $x_{1,2} = 1$p.u.). Esse transformador é utilizado para regular o fluxo de potência $P_{1,2}$ no valor $P_{1,2}^{esp} = 0{,}05$p.u. Pede-se para montar o sistema de equações (6.15).

6.4. Estender o programa de cálculo de fluxo de carga pelo método de Newton, desenvolvido no Prob. 5.2, para resolver o Prob. 6.3. Desenvolver duas versões:
   a) Utilizando a Eq. (6.14).
   b) Utilizando o procedimento de ajustes alternados dado pela Eq. (6.7).

6.5. Fazer um diagrama de blocos que represente a lógica utilizada para se considerar os limites de reativos das barras *PV*, durante a solução iterativa do problema do fluxo de carga. Devem-se prever tanto a possibilidade da transformação $PV \rightarrow PQ$ como a transformação inversa $PQ \rightarrow PV$ (*ver Sec.* 6.3.).

6.6. Repetir o exercício precedente, considerando agora os limites de magnitude de tensão nas barras *PQ* (*ver Sec.* 6.4.).

Capítulo 7

EQUIVALENTES EXTERNOS

Em estudos de planejamento da expansão e da operação de sistemas de energia elétrica, partes da rede podem ser representadas pelos equivalentes externos visando-se à redução das dimensões dos problemas de análise (fluxo de carga, curto-circuito, etc.) e, conseqüentemente, do esforço computacional. A análise de contingências de linhas de transmissão e transformadores, a alocação ótima de bancos de capacitores e o planejamento da expansão de redes de transmissão são exemplos de problemas de análise de redes que exigem uma seqüência de soluções de fluxo de carga. Na análise de contingências, por exemplo, para cada uma das contingências (perdas de linhas/transformadores) consideradas possíveis é necessária a determinação de uma solução de fluxo de carga. Para esta categoria de problemas (soluções repetidas de casos semelhantes), a redução das dimensões da rede pela utilização de equivalentes pode trazer vantagens computacionais significativas. Nestes casos, o procedimento adotado pode ser o seguinte: parte-se de uma solução inicial para a rede completa (caso básico) e obtém-se uma rede reduzida (rede de interesse mais o equivalente externo); a seqüência de casos é então analisada utilizando-se a rede reduzida. O que foi dito anteriormente para problemas que exigem soluções repetidas de fluxo de carga vale também em relação a outros métodos de análise de redes de energia elétrica, como é o caso, entre outros, do cálculo de curto-circuito, despacho de potência e estabilidade transitória.

Por outro lado, em aplicações ligadas à supervisão e ao controle em tempo real (*ver o Apêndice A*), a necessidade de equivalentes externos se deve (além dos problemas computacionais) à falta de informações completas e atualizadas sobre o estado atual de toda a rede de transmissão. Um centro de operação regional geralmente só dispõe de informações atualizadas sobre o estado da parte monitorada da rede (região da qual o centro de operações recebe periodicamente telemedidas e sobre a qual comanda ações de controle). Assim sendo, neste tipo de aplicação é essencial a representação (aproximada) das regiões não-monitoradas (não-observáveis) através de redes equivalentes. De modo diferente do que ocorre em outras aplicações (mencionadas no parágrafo anterior), neste caso geralmente não se dispõe de uma solução da rede completa a partir da

qual se poderia obter o equivalente pelo fato de a rede externa ser não-monitorada. O equivalente é então obtido utilizando-se apenas as informações sobre o estado e a configuração da rede de interesse (disponíveis no centro de operação) e sobre a configuração da rede externa. Nota-se que, apesar de o estado da rede externa não ser conhecido (isto exigiria a transmissão periódica de uma quantidade de informações muito elevada), a configuração externa pode ser mantida atualizada pelo centro de operação pois ela varia muito lentamente (em comparação com as alterações no estado) e as informações correspondentes podem ser transmitidas com maior facilidade.

7.1. *Reações externas*

A Fig. 7.1 representa uma rede subdividida em três partes: rede interna, fronteira e rede externa. A rede interna, juntamente com a fronteira, constitui a área de interesse. Na supervisão e no controle em tempo real a área de interesse se confunde com a própria área monitorada (ou área observável). O objetivo básico do equivalente externo é o de simular as reações da rede externa quando ocorrem alterações na rede de interesse, provocadas, por exemplo, por contingências de linhas, transformadores ou geradores. Para muitas perturbações internas, as reações externas podem ser insignificantes, mas, para outras, principalmente as que ocorrem nas proximidades da fronteira, essas reações geralmente são importantes e exigem a utilização de equivalentes para representá-las. É claro que o ideal seria a representação completa da rede externa, mas isto, conforme foi mencionado anteriormente, nem sempre é possível ou desejável.

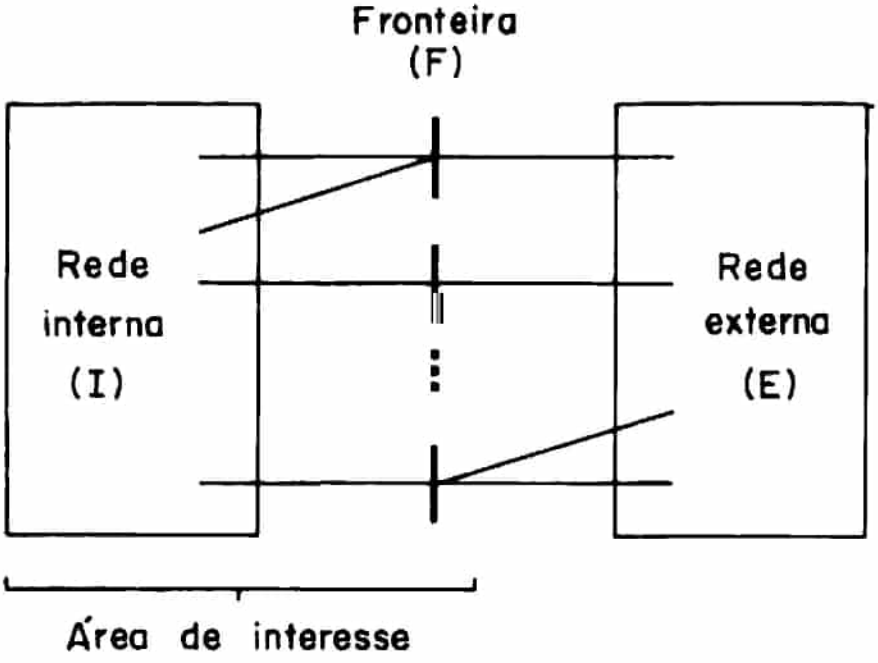


Figura 7.1 – Decomposição de uma rede em rede interna, fronteira e rede externa

Uma solução trivial para o problema de equivalentes externos seria a de se desligar a rede externa, substituindo-se os fluxos entre as barras de fronteira e as barras externas por injeções adicionais nas barras de fronteira. No caso básico, o estado da rede de interesse seria o mesmo da rede completa. Entretanto, geralmente este tipo de equivalente seria inaceitável, pois a rede externa (substituída por injeções constantes) não reagiria diante de perturbações internas, prejudicando a precisão do estado calculado nas situações em que as reações externas são significativas. Dito de outra forma, para a rede completa observa-se que uma perturbação na área de interesse provoca alterações nos fluxos de potência nas linhas que ligam a fronteira às barras externas (reação externa); se a rede externa for substituída por injeções equivalentes, ter-se-á um modelo de rede no qual os intercâmbios entre a fronteira e a rede externa são consideradas constantes, o que nem sempre corresponde à realidade.

7.2. *Equivalente Ward: modelo linear* [13]

Nesta seção será apresentado o método clássico de determinação de equivalentes externos desenvolvidos por Ward e será discutida sua relação com o Teorema de Norton Generalizado. Considere-se, inicialmente, uma rede representada por um modelo linear do tipo

$$Y\underline{E} = \underline{I} \tag{7.1}$$

em que Y é a matriz admitância nodal, $\underline{E}$ é o vetor das tensões complexas dos nós e $\underline{I}$ é o vetor das injeções nodais de corrente. Neste tipo de modelo, as cargas/geradores podem ser representadas por corrente constante, admitância constante, ou ambos; as correntes aparecem no vetor $\underline{I}$ e as admitâncias são incluídas na diagonal principal da matriz Y. Seguindo-se a divisão apresentada na Fig. 7.1, a equação $Y\underline{E} = \underline{I}$ pode ser colocada na forma:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_{EE} & Y_{EF} & \\ \hline Y_{FE} & Y_{FF} & Y_{FI} \\ \hline & Y_{IF} & Y_{II} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \underline{E}_E \\ \hline \underline{E}_F \\ \hline \underline{E}_I \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \underline{I}_E \\ \hline \underline{I}_F \\ \hline \underline{I}_I \\ \hline \end{array} \tag{7.2}$$

Explicitando-se $\underline{E}_E$ a partir da primeira equação do sistema (7.2), obtém-se:

$$\underline{E}_E = Y_{EE}^{-1}(\underline{I}_E - Y_{EF}\underline{E}_F) \tag{7.3}$$

Substituindo-se $\underline{E}_E$ na segunda equação do sistema (7.2), obtém-se o sistema reduzido:

$$\begin{bmatrix} Y_{FF}^{eq} & Y_{FI} \\ Y_{IF} & Y_{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{E}_F \\ \underline{E}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_F^{eq} \\ \underline{I}_I \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

em que

$$Y_{FF}^{eq} = Y_{FF} - Y_{FE} Y_{EE}^{-1} Y_{EF} \tag{7.5}$$

$$\underline{I}_F^{eq} = \underline{I}_F - Y_{FE} Y_{EE}^{-1} \underline{I}_E \tag{7.6}$$

O sistema de equações reduzido dado em (7.4) só envolve as variáveis de estado da rede de interesse ($\underline{E}_F$ e $\underline{E}_I$). Da mesma forma que o sistema (7.2) corresponde à situação representada na Fig. 7.1, ao sistema (7.4) está associada a rede reduzida (rede de interesse e equivalente externo) conforme se ilustra na Fig. 7.2. A matriz Y_{FF}^{eq} contém as admitâncias das ligações entre as barras de fronteira e também as admitâncias *shunt* das barras de fronteira: a matriz Y_{FF} corresponde aos elementos existentes na rede original e a matriz $-Y_{FE} Y_{EE}^{-1} Y_{EF}$ corresponde aos elementos que aparecem devido ao processo de redução. O vetor $\underline{I}_F^{eq}$ contém as injeções de corrente equivalentes, que são formadas por duas componentes: as injeções previamente existentes $\underline{I}_F$ mais uma componente correspondente à distribuição sobre a fronteira das injeções externas ($-Y_{FE} Y_{EE}^{-1} \underline{I}_E$). A matriz de distribuição $-Y_{FE} Y_{EE}^{-1}$ representa a maneira pela qual as injeções externas $\underline{I}_E$ se dividem entre as barras de fronteira.

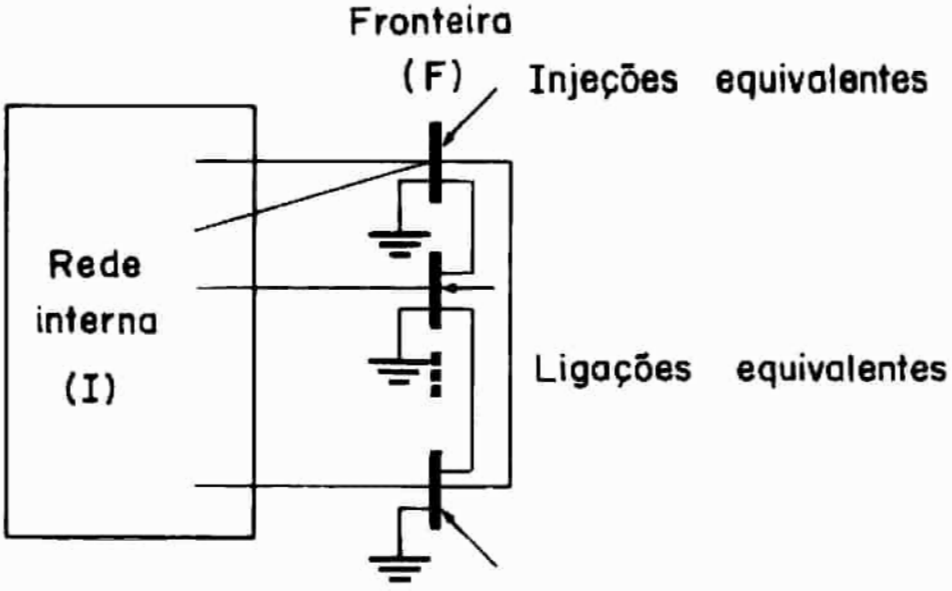


Figura 7.2 – Rede reduzida formada pela rede de interesse e pelo equivalente externo

Foi visto então que uma rede externa pode ser substituída por um conjunto de admitâncias série e *shunt* ligadas aos nós de fronteira e por um conjunto de injeções de corrente nesses nós. Este resultado é uma generalização do Teorema de Norton; no caso particular em que a fronteira é formada apenas por um nó e pelo nó-referência, tem-se o teorema em sua forma mais simples, ou seja, uma fonte de corrente e uma admitância equivalente entre esses dois nós substituem a rede externa.

As injeções equivalentes $\underline{I}_F^{eq}$ dadas pela expressão (7.6) dependem das injeções de corrente nas barras externas $\underline{I}_E$. Nas aplicações em tempo real, entretanto, esta informação geralmente não é disponível, conforme já foi mencionado no início deste capítulo. Neste tipo de aplicação, o vetor $\underline{I}_F^{eq}$ pode ser determinado a partir da expressão (7.4):

$$\underline{I}_F^{eq} = Y_{FF}^{eq}\,\underline{E}_F + Y_{FI}\,\underline{E}_I \tag{7.7}$$

Note-se que os vetores $\underline{E}_F$ e $\underline{E}_I$ constituem o estado da rede de interesse que, em um centro de controle em tempo real, é determinado pelo estimador de estado (*ver o Apêndice A*). Observe ainda que a expressão (7.7) estabelece simplesmente que a injeção equivalente de corrente em uma barra de fronteira é dada pelo somatório das correntes em todas as admitâncias ligadas a essa barra (admitâncias fronteira-fronteira, fronteira-interno e *shunts* da fronteira); a k-ésima componente de $\underline{I}_F^{eq}$ tem a forma

$$I_k^{eq} = -y_k^{sh,\,eq}\,E_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k^I} y_{km}^{eq}\,E_{km} + \sum_{m \in \Omega_k^I} y_{km}\,E_{km} \tag{7.8}$$

em que y_{km}^{eq} e $y_{km}^{sh,\,eq}$ são admitâncias equivalentes (Fig. 7.2), Ω_k^F é o conjunto das barras vizinhas de k pertencentes à fronteira, Ω_k^I corresponde às vizinhas internas e E_{km} é a diferença de tensão $E_k - E_m$ existente sobre o ramo $k-m$.

Apesar de a expressão (7.7) ter sido introduzida tendo-se como motivação a aplicação em centros de supervisão e controle em tempo real, ela tem implicações muito importantes que extrapolam este tipo de aplicação. Considere-se, por exemplo, uma situação na qual exista um erro nos dados sobre a topologia da rede externa (uma linha consta dos dados como estando em operação e de fato está desligada). Neste caso, a matriz Y_{FF}^{eq}, e conseqüentemente as admitâncias equivalentes à rede reduzida (Fig. 7.2), estará errada. Mesmo assim, se as injeções equivalentes $\underline{I}_F^{eq}$ forem calculadas pela expressão (7.7) utilizando-se o estado correto ($\underline{E}_F$, $\underline{E}_I$) da rede de interesse, então o modelo reduzido (7.4) reproduzirá corretamente o ponto de operação desta parte da rede (fluxos, tensões, etc.). Isto significa que as injeções equivalentes dadas por (7.7) não permitem que erros de modelagem externa se propaguem para a rede de interesse: os erros são automaticamente compensados pelas injeções equivalentes nas barras de fronteira. Assim sendo, sempre é possível obter-se um equivalente que

reproduza corretamente o caso básico da rede de interesse, basta que se calculem as injeções equivalentes impondo-se o estado correto $\underline{E}_F$ e $\underline{E}_I$. As diferenças entre um equivalente com erro de configuração e outro sem erros só podem ser observadas quando são simuladas perturbações que exigem reações da rede externa equivalenciada, pois o equivalente com erro perde parcialmente sua capacidade de resposta (uma linha de transmissão na qual o fluxo de corrente tinha a possibilidade de variar foi equivalenciada pelas injeções constantes). Um caso extremo ocorre quando na formação do equivalente todas as linhas externas são ignoradas; isto corresponde a se desligar a rede externa da rede de interesse e substituir o intercâmbio entre a fronteira e a rede externa por injeções equivalentes na fronteira. Neste caso, o equivalente seria formado só por injeções na fronteira, pois não existiriam admitâncias equivalentes (Fig. 7.2) e as reações externas não poderiam ser simuladas.

Para sistemas com pequenas dimensões, as admitâncias equivalentes podem ser obtidas pela expressão (7.5). Para sistemas com um grande número de barras, a obtenção da matriz Y_{FF}^{-1} pode ser impraticável, ou então muito ineficiente. Existe, entretanto, uma maneira simples e direta de se obter o equivalente externo utilizando-se o método da eliminação de Gauss. Esta técnica, que é baseada na relação existente entre a eliminação de Gauss e a redução de circuitos, foi discutida na Sec. 3.6 (Cap. 3) e será aplicada a seguir na determinação de equivalentes.

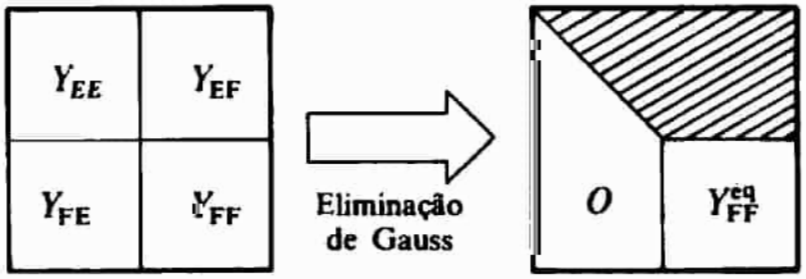
7.3. *Obtenção de equivalentes por eliminação de Gauss*

Nesta seção, será apresentada uma maneira alternativa de se obter o sistema reduzido (7.4). Considere-se novamente o sistema (7.2): pelo método da eliminação de Gauss podem-se zerar todos os coeficientes de $\underline{E}_E$ na segunda equação desse sistema, ou seja, pode-se fazer aparecer uma matriz de elementos nulos onde originalmente estava a matriz Y_{FE}. Isto pode ser feito de maneira sistemática, zerando-se os elementos abaixo da diagonal principal da submatriz Y_{EE}, tomando-se uma coluna da matriz por vez, da esquerda para a direita. Após a eliminação, o sistema (7.2) assume a forma:

$$\begin{bmatrix} U_{EE} & Y'_{EF} & \\ & Y_{FF}^{eq} & Y_{FI} \\ & Y_{IF} & Y_{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{E}_E \\ \underline{E}_F \\ \underline{E}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}'_E \\ \underline{I}_F^{eq} \\ \underline{I}_I \end{bmatrix} \qquad (7.9)$$

sendo U_{EE} a matriz triangular superior que corresponde à decomposição LDU da matriz Y_{EE}. Note-se que as matrizes Y_{FI}, Y_{IF} e Y_{II} não são afetadas pelo processo de redução, da mesma forma que o vetor $\underline{I}_I$; a redução do circuito externo só modifica as admitâncias entre barras de fronteira (passando-se de Y_{FF} para Y_{FF}^{eq}) e as injeções de corrente nessas barras (que passam de $\underline{I}_F$ para $\underline{I}_F^{eq}$). Um fato importante a ser observado é que a obtenção do equivalente foi feita pelo mesmo procedimento utilizado na resolução do sistema linear (7.2) por fatoração triangular de matrizes esparsas, e portanto as mesmas sub-rotinas podem ser utilizadas nos dois casos (*ver o Cap.* 3). A diferença entre a obtenção do equivalente e a resolução do sistema linear (7.2) é que no primeiro caso o procedimento é truncado após terem sido zerados os coeficientes de $\underline{E}_F$.

O processo de redução indicado na expressão (7.9) só envolve a rede externa e a fronteira (Fig. 7.3). Assim sendo, a obtenção da matriz Y_{FF}^{eq} pode ser feita operando-se só com a submatriz admitância nodal correspondente a esta parte do sistema, ou seja:



(7.10)

em que, na formação da matriz Y_{FF}, foram considerados todos os componentes ligados às barras de fronteira, inclusive as ligações com o sis-

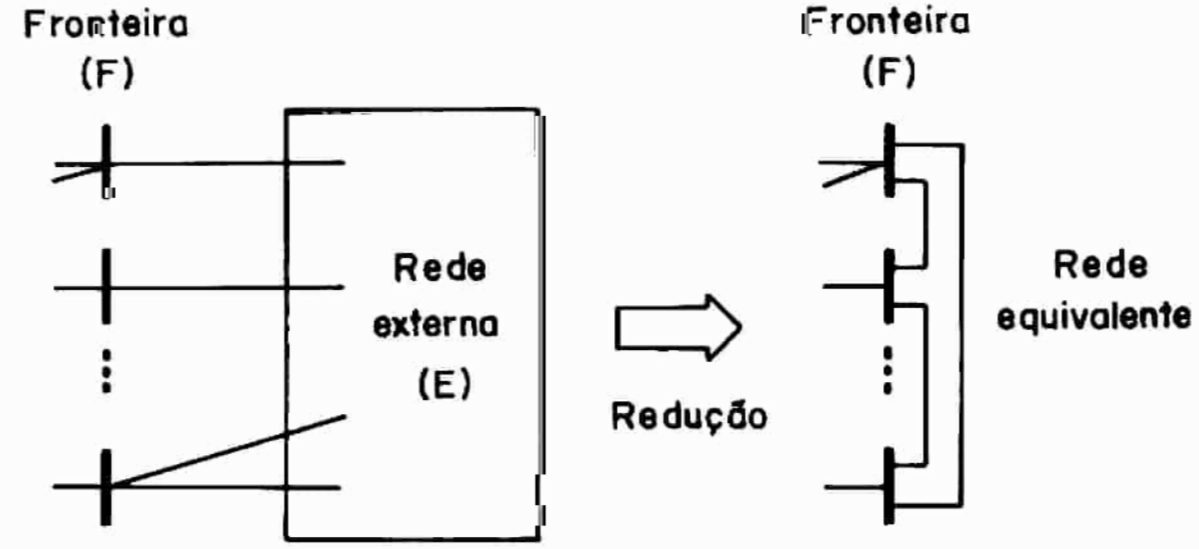


Figura 7.3 — Redução de rede externa

tema interno, conforme se indica na Fig. 7.3. Uma vez determinado Y_{FF}^{eq}, pode-se calcular o vetor das injeções equivalentes $\underline{I}_F^{eq}$ pela expressão (7.7).

A Fig. 7.4 mostra os dados correspondentes ao Modelo CC de uma rede de quatro barras (todos dados em p.u.). A equação $\underline{P} = B\underline{\theta}$ para este sistema é dada por:

	1	2	3			
1	4	−2	−2	θ_1		0,2
2	−2	4	0	θ_2	=	−0,3
3	−2	0	4	θ_3		−1,1

Procedendo-se à eliminação de Gauss para zerar os elementos da coluna 1, abaixo da diagonal principal, obtém-se:

	1	2	3			
1	4	−1/2	−1/2	θ_1		0,05
2	0	3	−1	θ_2	=	−0,2
3	0	−1	3	θ_3		−1,0

À rede reduzida da Fig. 7.4*b* está associado o sistema reduzido de equações:

	2	3			
2	3	−1	θ_2		−0,2
3	−1	3	θ_3	=	−1,0

Note-se nesta equação que as novas injeções das barras de fronteira são $P_2^{eq} = -0{,}2$ e $P_3^{eq} = -1{,}0$, e que a admitância equivalente entre os nós 2 e 3 é $y_{2,3}^{eq} = 1$. Esses mesmos valores poderiam ter sido obtidos a partir das expressões (7.5) e (7.6), ou seja:

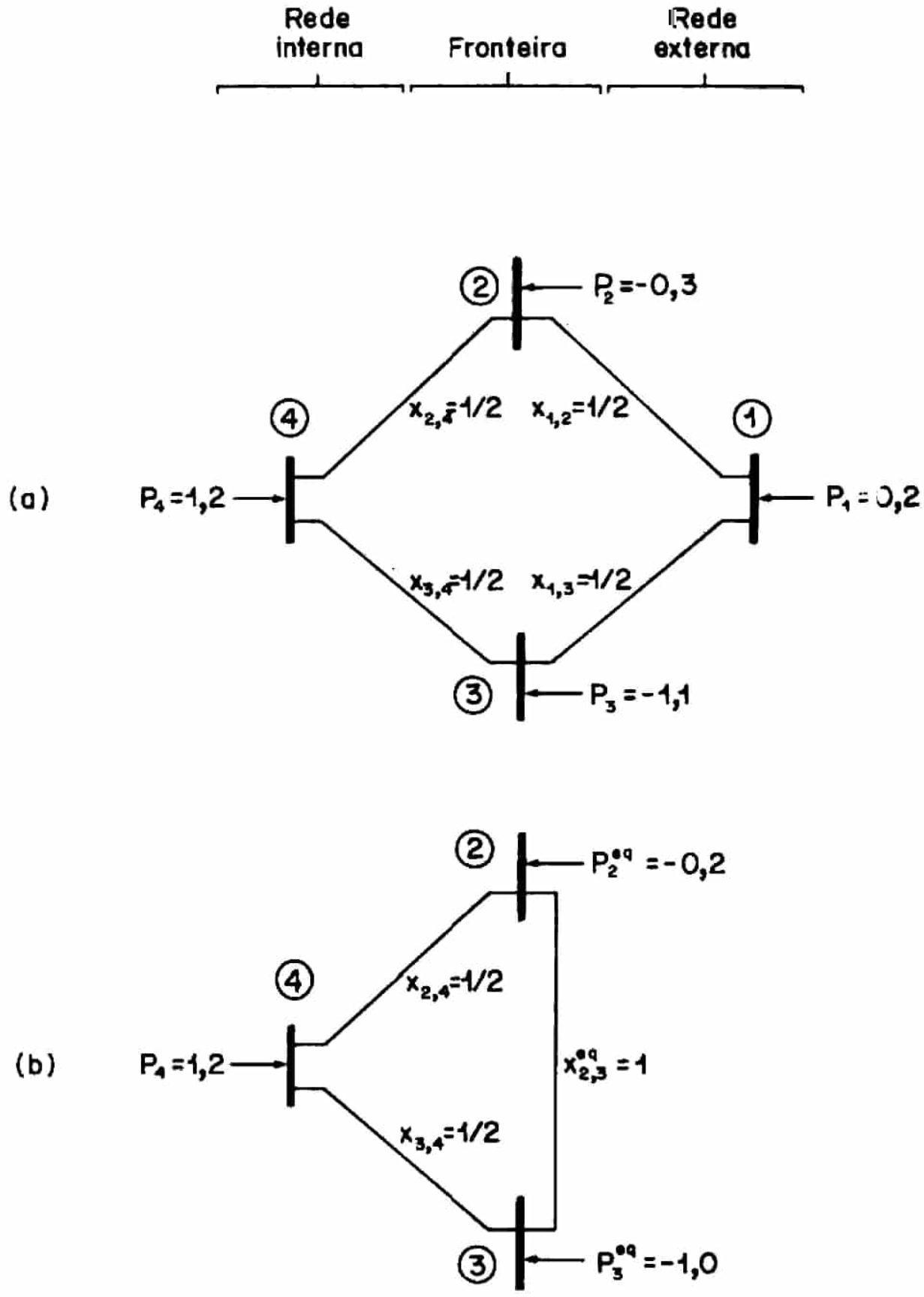


Figura 7.4 – Exemplo de equivalente utilizando Modelo CC/

$$Y_{FF}^{eq} = Y_{FF} - Y_{FE} Y_{EE}^{-1} Y_{EF} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\underline{I}_F^{eq} = \underline{I}_F - Y_{FE} Y_{EE}^{-1} \underline{I}_E =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}3 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} -0{,}2 \\ -1{,}0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

O sistema equivalente obtido anteriormente e representado na Fig. 7.4*b* poderia ser utilizado no estudo do efeito de uma perturbação interna que consiste em se reduzir a admitância da linha 4-2 para a metade do valor original. Após a perturbação, o estado calculado para a rede de interesse (nós 4, 3 e 2) seria o mesmo obtido utilizando-se a rede completa representada na Fig. 7.4*a*. A razão para isto é que o modelo adotado é linear ($B\underline{\theta} = \underline{P}$) e, para esses modelos, a redução da rede é exata. O mesmo não ocorre para equivalentes não-lineares, como será visto mais adiante; para esses equivalentes, os resultados da análise de perturbações são aproximados.

7.4. *Equivalente Ward: modelo não-linear* [13, 14]

As idéias básicas do equivalente Ward foram discutidas anteriormente utilizando-se um modelo linear ($Y\underline{E} = \underline{I}$) para representar a rede de transmissão; nesse modelo, os geradores e as cargas são representados por admitância constante (que aparecem na diagonal principal de Y) ou por corrente constante (componentes de $\underline{I}$). Nas aplicações mais comuns dos programas de fluxo de carga, entretanto, cargas e geradores costumam ser representados pelas injeções de potência constante; neste caso, o problema passa a ser do tipo não-linear e a obtenção do equivalente externo exige uma discussão adicional. O método de redução de circuitos descrito nas seções precedentes é um processo linear e, no caso de se utilizar um modelo linear para a rede de transmissão (do tipo $Y\underline{E} = \underline{I}$, por exemplo), o equivalente obtido será exato no sentido de que ele fornecerá os mesmos resultados que a rede não-reduzida na análise de perturbações na rede de interesse (análise de contingências, por exemplo).

Quando a rede é representada por um modelo não-linear (injeções de potência especificadas), a rede equivalente fornece resultados aproximados, mas que são aceitáveis para a maioria das aplicações práticas.

Quando se utiliza um modelo não-linear da rede de transmissão, a obtenção do equivalente Ward pode ser feita em duas etapas: na primeira, é determinada a rede equivalente (admitâncias equivalentes na fronteira); e, na segunda, são calculadas as injeções equivalentes nas barras de fronteira. O cálculo das admitâncias equivalentes segue o mesmo procedimento adotado para os modelos lineares descrito nas seções precedentes [expressão (7.10) e Fig. 7.3]. Na segunda etapa é que aparece a diferença em relação ao modelo linear; são calculadas injeções equivalentes de potência ativa e reativa em vez de injeções de corrente. As injeções equivalentes na fronteira são utilizadas para acoplar a rede equivalente à rede de interesse de tal forma a garantir que os estados da rede interna e da fronteira, no caso básico, não sejam afetados pela substituição da rede externa pelo equivalente. Essas injeções são dadas por

$$P_k^{eq} = V_k^0 \sum_{m \in K} V_m^0 (G_{km}^{eq} \cos \theta_{km}^0 + B_{km}^{eq} \operatorname{sen} \theta_{km}^0)$$

$$Q_k^{eq} = V_k^0 \sum_{m \in K} V_m^0 (G_{km}^{eq} \operatorname{sen} \theta_{km}^0 - B_{km}^{eq} \cos \theta_{km}^0) \qquad (7.11)$$

em que V^0 e θ^0 são as variáveis de estado correspondentes ao caso básico, K é o conjunto de barras de fronteira e internas vizinhas à barra k (incluindo a própria barra k), e $G_{km}^{eq} + jB_{km}^{eq}$ é um elemento da matriz admitância nodal Y^{eq} da rede reduzida (rede interna mais equivalente).

$$Y^{eq} = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{FF}^{eq} & Y_{FI} \\ \hline Y_{IF} & Y_{II} \\ \hline \end{array} \qquad (7.12)$$

Note-se que a injeção de potência complexa $P_{km}^{eq} + jQ_{km}^{eq}$ [*ver as Eqs.* (7.11)] é igual ao somatório dos fluxos de potência em todas as linhas existentes entre a barra k e suas barras vizinhas (pertencentes à fronteira e à rede interna) mais a potência no elemento shunt. Essas injeções podem ser obtidas rodando-se um programa de fluxo de carga para a rede reduzida (Fig. 7.2) considerando-se (temporariamente) as barras de fronteira como sendo do tipo $V\theta$ com as magnitudes das tensões e os ângulos especificados nos valores do caso básico (V_k^0, θ_k^0); as injeções de potência nas barras de fronteira calculadas pelo fluxo de carga são as próprias injeções equiva-

lentes dadas pelas expressões (7.11); após o cálculo das injeções equivalentes, as barras de fronteira devem ser reconvertidas a seus tipos originais (*PV*, *PQ*, etc.).

A redução da matriz admitância nodal do sistema externo, conforme se indica em (7.10), pode provocar o aparecimento de elementos *shunt* nas barras de fronteira com admitâncias anormalmente elevadas; quando isto ocorre, as injeções equivalentes calculadas pelas expressões (7.11) podem ter valores muito elevados. Este tipo de problema ocorre freqüentemente quando as cargas externas são modeladas por admitâncias constantes, mas pode aparecer também quando as cargas não são modeladas desta maneira devido à existência dos próprios elementos *shunt* da rede (reatores, capacitores, *shunts* de linhas de transmissão, etc.). Valores anormais de injeções e admitâncias *shunt* nas barras de fronteira, além de deteriorarem a qualidade do equivalente (precisão), podem provocar dificuldades de convergência dos programas de fluxo de carga. A possibilidade do aparecimento de admitâncias *shunt* anormais nas barras de fronteira, mesmo quando as cargas externas não são modeladas por admitâncias constantes, pode ser entendida da seguinte maneira: considere-se uma rede de transmissão com todos os seus componentes ligados, com exceção das cargas e geradores; as admitâncias entre barras (elementos-série do modelo equivalente π) são muito maiores que as admitâncias dos elementos *shunt*, ou seja, é como se as barras estivessem curto-circuitadas pelos elementos-sèrie e os elementos *shunt* estivessem ligados em paralelo; observa-se então que, quando a matriz Y da rede externa é reduzida, a soma (aproximada) desses elementos *shunt* acaba aparecendo na fronteira, podendo dar origem aos valores anormais de admitâncias *shunt* de fronteira para alguns sistemas. Uma solução para esse problema (nos sistemas em que ele aparece) consiste em se obter a rede equivalente de fronteira considerando-se só os elementos-série da rede externa, ou seja, forma-se a matriz admitância (7.10) ignorando-se todos os tipos de elementos *shunt* da rede externa (reatores, capacitores, cargas, etc.); pela redução da matriz admitância externa obtêm-se as admitâncias equivalentes entre as barras de fronteira; uma vez obtidas as admitâncias equivalentes série são calculadas as injeções equivalentes (7.11).

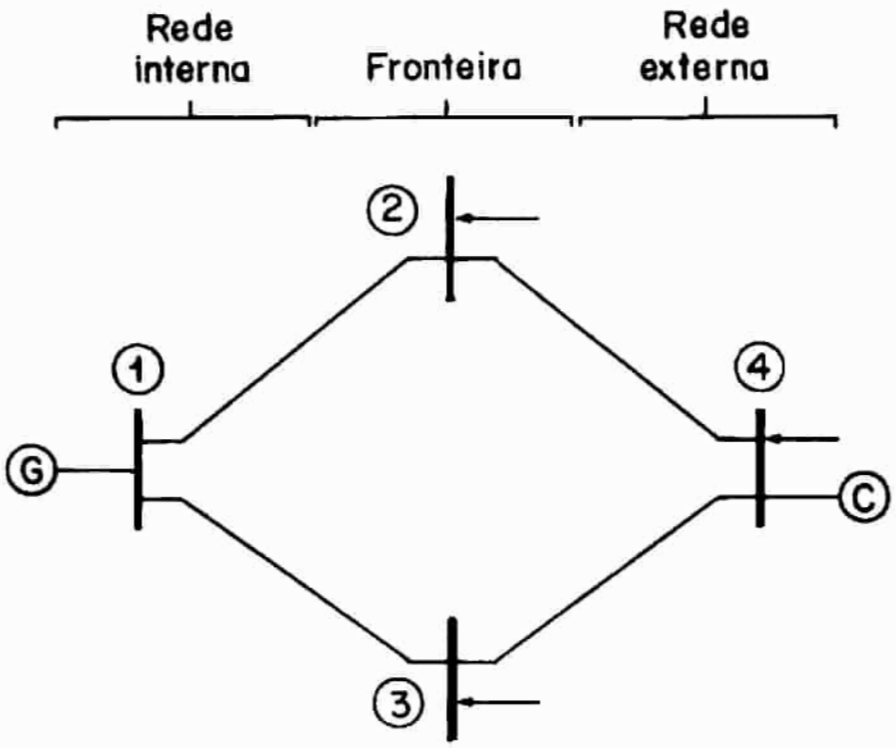
Quando utilizado na análise de perturbações na rede de interesse, o equivalente de Ward estudado nesta seção geralmente apresenta boa precisão para a parte ativa (fluxos de potência ativa) e resultados pobres para a parte reativa (magnitudes das tensões e fluxos de potência reativa). Por exemplo, na análise de contingências de linhas da rede de interesse, utilizando-se a rede reduzida (Fig. 7.2), os fluxos estimados nas linhas de intercâmbio apresentam precisão aceitável para as potências ativas mas podem ser bastante imprecisas para as potências reativas. A origem das dificuldades na representação das reações reativas do equivalente Ward reside basicamente no fato de ele não considerar o efeito das barras *PV* do sistema externo, ou seja, estas barras são tratadas da mesma forma

que as barras *PQ*. Acontece, entretanto, que uma barra *PV* do sistema externo localizada nas proximidades da fronteira pode ser responsável por um suporte de reativos significativo durante uma contingência. Se o equivalente externo não considerar este fato, os resultados poderão ser bastante imprecisos. Existem pelo menos duas maneiras de se representar o efeito das barras *PV* externas sem se prejudicar as boas características do equivalente Ward no que se refere ao comportamento da parte ativa e à simplicidade de implementação. Uma das maneiras é trivial: consiste simplesmente na retenção das barras *PV* externas que estejam eletricamente próximas da fronteira; isto significa que estas barras são excluídas do processo de redução da rede externa. A outra maneira é o equivalente Ward estendido, no qual o efeito das barras *PV* externas é simulado por um suporte de reativos nas barras de fronteira (a cada barra de fronteira é anexada uma barra *PV*-fictícia). Estas duas técnicas serão discutidas nas próximas seções.

Considere-se como exemplo a rede cujos dados estão na Fig. 7.5. A eliminação da barra externa (barra 4) produz o equivalente representado na Fig. 7.6. Neste caso, a impedância da linha equivalente 2-3 é simplesmente a soma das impedâncias das linhas 2-4 e 4-3. As injeções equivalentes nas barras de fronteira foram obtidas rodando-se um fluxo de carga para a rede reduzida da Fig. 7.6, considerando-se as barras 2 e 3 como sendo temporariamente do tipo $V\theta$ com tensões especificadas nos valores do caso básico (V_2^0 /θ_2^0 e V_3^0 /θ_3^0); isto equivale a utilizarem-se as expressões de P_k^{eq} e Q_k^{eq} dadas em (7.11). Para se testar o desempenho do equivalente foi analisada uma perturbação que consistiu em se desligar a carga da barra 2. Foram estudados três casos: rede completa no caso básico, rede completa na situação perturbada e rede reduzida na situação perturbada; a rede reduzida para a situação inicial não precisa ser analisada pois o estado é o mesmo da rede completa no caso básico. Os resultados do fluxo de carga obtidos nos três casos estão resumidos na tabela dada a seguir:

Variáveis		V_2	V_3	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$Q_{1,2}$	$Q_{1,3}$	$MVA_{1,2}$	$MVA_{1,3}$
Caso básico		0,972	0,948	30,2	37,6	1,9	6,3	30,3	38,0
Caso perturbado	Completo	0,995	0,951	18,6	33,3	−1,9	5,9	18,7	33,8
	Reduzido	1,007	0,963	18,6	33,4	−4,3	3,6	19,1	33,5

Mesmo em um exemplo pequeno como este, já se pode observar que as estimativas dos fluxos ativos são boas, enquanto os fluxos reativos e as magnitudes das tensões deixam muito a desejar; as deficiências do modelo



Dados das barras

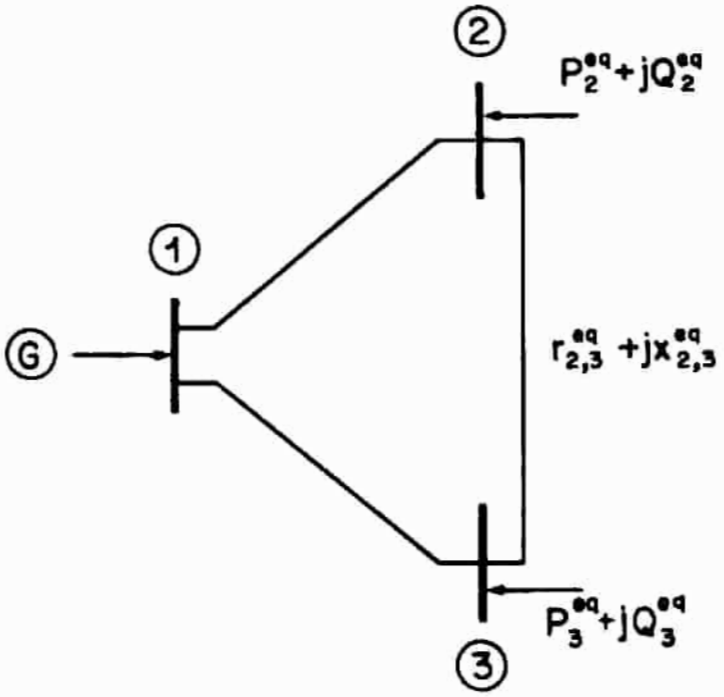
Dados das barras

Barra	Tipo	P	Q	V	θ
1	Folga	—	—	1,0	0,0
2	PQ	−0,15	−0,05	—	—
3	PQ	−0,30	−0,10	—	—
4	PV	−0,20	—	1,0	—

Dados das linhas

Linha	r	x	b^{sh}
1-2	0,10	0,50	0,0
1-3	0,10	0,50	0,0
2-4	0,10	0,50	0,0
3-4	0,10	0,50	0,0

Figura 7.5 — Rede-exemplo



Rede equivalente

Linha	r	x	b^{sh}
2-3	0,20	1,00	0,0

Injeções equivalentes

Barra	P^{eq}	Q^{eq}
2	−0,253	+0,043
3	−0,398	−0,006

Figura 7.6 – Equivalente Ward clássico para a rede da Fig. 7.5

utilizado se devem ao fato de que não foi representado no equivalente o suporte de reativos fornecidos pela barra *PV* externa (barra 4), que desempenha um papel significativo na determinação da reação externa.

7.5. *Equivalente Ward com retenção de barras PV* [15]

Neste método, algumas ou todas as barras *PV* da rede externa não são eliminadas durante o processo de redução. Em geral, interessa reter apenas as barras *PV* externas que possam apresentar reações significativas diante

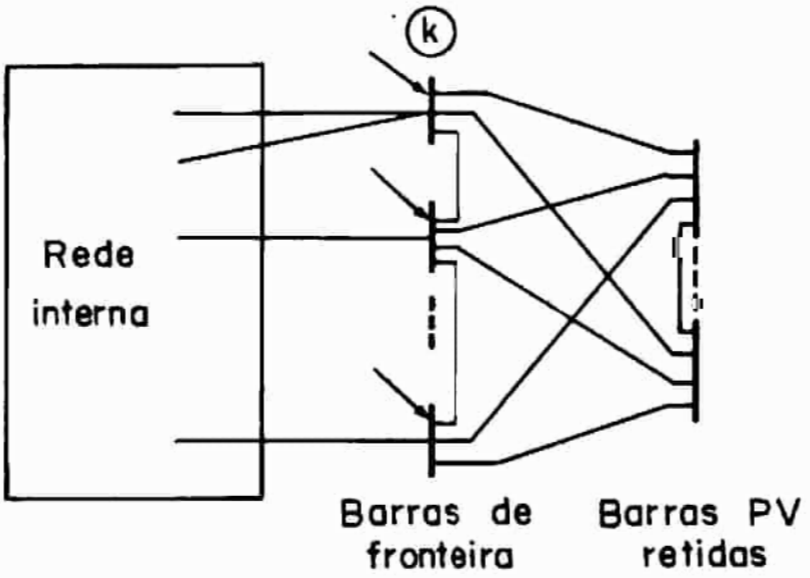


Figura 7.7 – Equivalente Ward com retenção de barras *PV* internas

da ocorrência de perturbações (contingência, por exemplo) na rede de interesse. A forma geral deste tipo de equivalente está representada na Fig. 7.7, e seu processo de obtenção é praticamente o mesmo da versão não-linear do equivalente Ward, com uma pequena diferença na determinação das injeções equivalentes nas barras de fronteira. Nesta seção é discutida apenas a retenção de barras *PV*, mas o mesmo tratamento pode ser dado para a retenção de qualquer tipo de barra; a retenção de barras de outros tipos pode ser interessante em alguns casos, como ocorre, por exemplo, em situações em que se deseja preservar a esparsidade da rede equivalente.

Esta versão do equivalente Ward, da mesma forma que as versões precedentes, pode ser obtida em dois passos: determinação das admitâncias equivalentes que interligam as barras de fronteira e as barras *PV* retidas, conforme se indica na Fig. 7.7; e cálculo de injeções equivalentes para anexar a rede equivalente à rede de interesse. Na determinação das admitâncias equivalentes pode ser utilizado o procedimento indicado em (7.10); notar que, neste caso, as barras *PV* externas são consideradas como se fossem barras de fronteira na formação da matriz admitância nodal que aparece em (7.10), dado que as barras *PV* externas, da mesma forma que as barras de fronteira, não são eliminadas.

A determinação das injeções equivalentes nas barras de fronteira pode ser feita utilizando-se o seguinte procedimento:

i) Inicialmente, são determinados os ângulos das tensões das barras *PV* externas retidas; este cálculo é feito rodando-se um fluxo de carga para a rede formada pelas barras de fronteira e as barras *PV* externas retidas; as barras de fronteira são consideradas temporariamente como sendo barras do tipo $V\theta$ (V e θ especificados nos valores correspondentes

do caso básico); os valores de P e V nas barras PV retidas são considerados conhecidos (caso básico da rede completa); e nas aplicações em tempo real, como não se dispõe de uma solução da rede completa, podem ser utilizados valores estimados de P e V (a precisão dessas estimativas não é muito crítica para a qualidade final do equivalente).

ii) Uma vez conhecidos os estados da rede interna, da fronteira e das barras PV externas retidas podem-se calcular as injeções equivalentes nas barras de fronteira pelas expressões de P_k^{eq} e Q_k^{eq} dadas em (7.11).

Toda a discussão precedente foi apresentada visando-se à retenção de barras PV externas; o mesmo procedimento pode, no entanto, ser aplicado quando se trata da retenção de outros tipos de barras.

7.6. *Equivalente Ward estendido* [14]

Este equivalente é uma extensão da versão não-linear do equivalente Ward discutido na Sec. 7.4, obtida pela introdução de um dispositivo de ajuste das injeções de potência reativa das barras de fronteira que visa a representar as reações das barras PV externas eliminadas durante o processo de redução. Isso significa que, apesar de eliminadas, as barras PV externas têm seu efeito aproximadamente representado pelo dispositivo de ajuste das injeções reativas da fronteira. A forma geral do equivalente Ward estendido está ilustrada na Fig. 7.7: as admitâncias equivalentes que interligam as barras de fronteira entre si e as injeções equivalentes na fronteira são obtidas da mesma forma que no equivalente Ward (versão não-linear); a simulação do efeito das barras PV externas é feita pelas ligações fictícias que ligam as barras de fronteira às barras PV-fictícias.

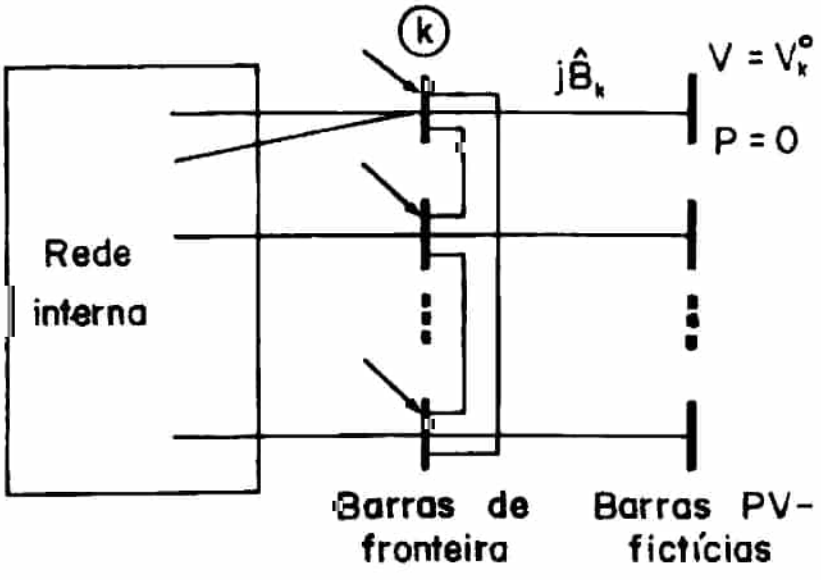


Figura 7.7 – Equivalente Ward estendido

As magnitudes das tensões especificadas para as barras *PV*-fictícias são as mesmas das barras de fronteira correspondentes para o caso básico ($V = V_k^0$), sendo as potências ativas especificadas nulas ($P = 0$). Assim sendo, os fluxos nas ligações fictícias são nulos no caso básico e as reações das barras *PV*-fictícias só ocorrem diante de alterações no estado das barras de fronteira provocadas, por exemplo, por uma contingência na rede de interesse. Nessas situações, isto é, quando a magnitude da tensão de uma barra de fronteira varia, a barra *PV*-fictícia correspondente injeta (ou retira) reativos que representam aproximadamente o efeito sobre a fronteira das barras *PV* externas eliminadas. Essas injeções de potência reativa são dadas por

$$\Delta Q_k = V_k \hat{B}_k \Delta V_k \tag{7.13}$$

em que ΔV_k é a variação na tensão da barra de fronteira em relação ao caso básico.

O significado e o modo de obtenção das susceptâncias $\hat{B}_k$ são discutidos a seguir. A reação reativa do sistema externo (incluindo o efeito das barras *PV*) a uma perturbação interna é dada aproximadamente por

$$\Delta \underline{Q}^{red} / V = B''_{red} \, \Delta \underline{V} \tag{7.14}$$

em que $\Delta \underline{Q}^{red}$ é o vetor das alterações nas injeções de potência reativa na fronteira provenientes do sistema externo; $\Delta \underline{V}$ é o vetor dos desvios nas magnitudes das tensões das barras de fronteira; e B''_{red} é a matriz B'' (método desacoplado rápido) do sistema externo reduzida até a fronteira. A matriz B''_{red} pode ser obtida reduzindo-se a matriz B'' da rede representada na Fig. 7.8, onde só aparecem ligações entre barras externas ou entre uma barra de fronteira e uma barra externa:

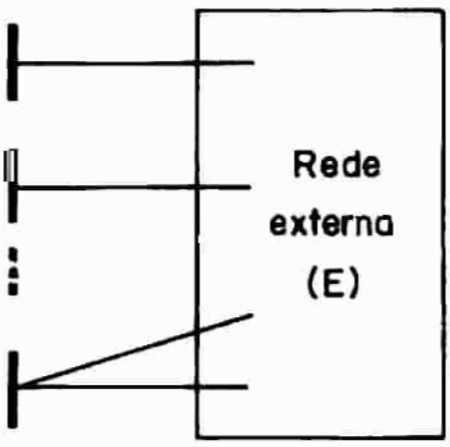
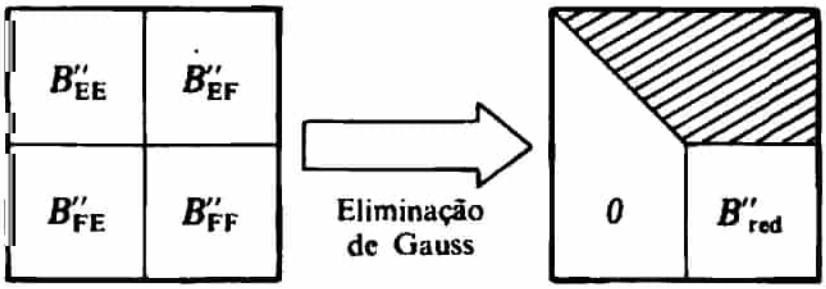


Figura 7.8 – Rede utilizada na obtenção da matriz B''_{red}



(7.15)

sendo B''_{FF} uma matriz diagonal. A reação reativa externa dada pela expressão (7.14) pode ser subdividida em duas componentes:

- A primeira devida às susceptâncias equivalentes entre barras de fronteira, que correspondem aos elementos de fora da diagonal principal da matriz B''_{red};

- A segunda componente dada pelas susceptâncias $\hat{B}_k$ que são uma parcela das susceptâncias que aparecem na diagonal principal da matriz B''_{red} ($\hat{B}_k$ é dado pela soma algébrica dos elementos da linha k da matriz B''_{red}, incluindo o elemento da diagonal principal).

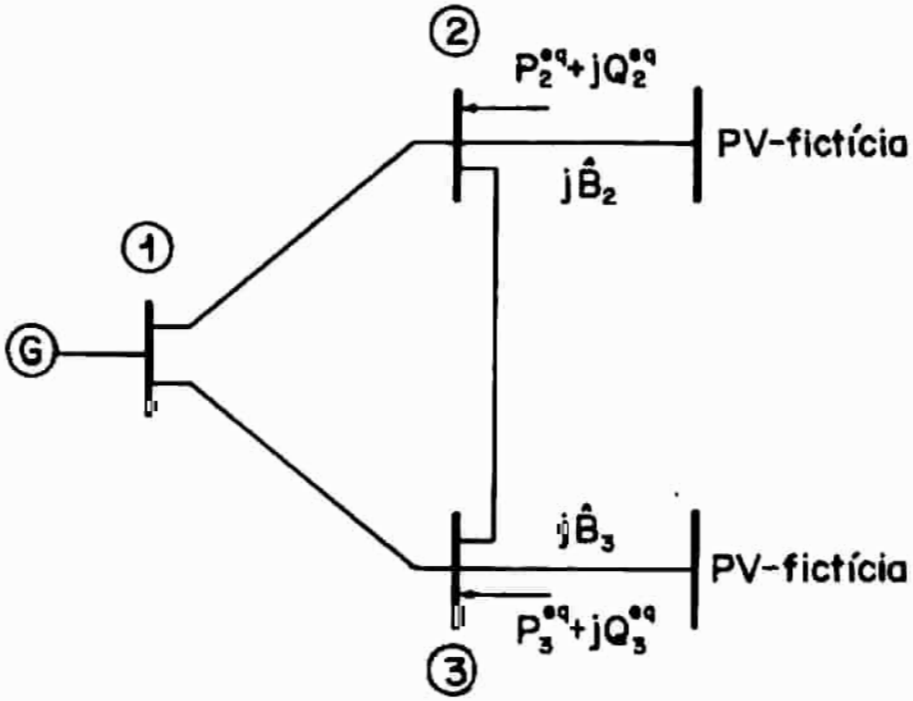
A primeira componente já é representada aproximadamente no equivalente Ward, enquanto a segunda é dada pelas barras *PV*-fictícias.

Apesar de as considerações precedentes terem sido feitas em termos da matriz B'' do método desacoplado rápido, o equivalente Ward estendido pode ser utilizado em conjunto com qualquer método de cálculo de fluxo de carga, pois se trata de um equivalente que pode ser representado fisicamente por meio de uma rede elétrica, conforme se ilustra na Fig. 7.7. (os dados referentes ao equivalente externo têm o mesmo formato que os dados sobre as linhas e barras da rede de interesse, e portanto não exigem tratamento especial).

Considere-se novamente a rede-exemplo representada na Fig. 7.5, que já foi utilizada para ilustrar o desempenho da versão não-linear do equivalente Ward. A Fig. 7.9 mostra o equivalente Ward estendido para essa rede: a impedância equivalente $r^{eq}_{2,3} + jx^{eq}_{2,3}$ é a mesma do equivalente Ward; as susceptâncias das ligações fictícias ($\hat{B}_2$ e $\hat{B}_3$) são as próprias susceptâncias das linhas 2-4 e 3-4; as injeções equivalentes são as mesmas do equivalente Ward, uma vez que no caso básico os fluxos nas ligações fictícias são nulos. A tabela dada a seguir mostra os resultados obtidos na análise de uma perturbação que consistiu em se desligar a carga da barra 2.

Para efeito de comparação são também apresentados os resultados obtidos com o equivalente Ward.

Variáveis		V_2	V_3	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$Q_{1,2}$	$Q_{1,3}$	$MVA_{1,2}$	$MVA_{1,3}$
Caso básico		0,972	0,948	30,2	37,6	1,8	6,4	30,3	38,0
Caso perturbado	Completo	0,996	0,951	18,6	33,3	−1,9	5,9	18,7	33,8
	Ward estendido	0,992	0,953	18,6	33,5	−1,2	5,3	18,6	33,9
	Ward	1,007	0,963	18,6	33,4	−4,3	3,6	19,1	33,5



Parâmetros da rede equivalente

$r_{2,3}^{eq}$	$x_{2,3}^{eq}$	$\hat{B}_2$	$\hat{B}_3$
0,20	1,00	−1,92	−1,92

Injeções equivalentes

Barra	P^{eq}	Q^{eq}
2	−0,253	+0,043
3	−0,398	−0,006

Figura 7.9 – Equivalente Ward estendido para a rede-exemplo da Fig. 7.5

Pode-se ver pelos resultados apresentados que há uma melhoria significativa da precisão dos resultados em relação ao equivalente Ward, sendo que agora as grandezas calculadas, utilizando-se a rede reduzida, praticamente coincidem com os valores calculados com a rede completa.

7.7. *Modelo de fluxo de carga não-reduzido* [15, 16]

Na Sec. 7.5 foi apresentada uma versão do equivalente Ward na qual são retidas barras *PV* da rede externa. Foi mencionado também que o mesmo procedimento pode ser utilizado para situações nas quais se pretende reter outros tipos de barras (barras *PQ*, por exemplo). Uma situação interessante é o caso extremo no qual todas as barras externas são retidas; neste caso, a obtenção da rede equivalente se resume ao cálculo das injeções equivalentes nas barras de fronteira, uma vez que não há redução da rede externa. O tipo particular de equivalente assim obtido é chamado de modelo de fluxo de carga não-reduzido.

Qual o interesse prático do modelo não-reduzido, uma vez que ele não traz vantagens computacionais pelo fato de não diminuir as dimensões da rede? Imagine que se pretenda fazer um estudo para determinar quais as informações sobre o estado da rede externa são essenciais para a determinação das reações externas diante de uma perturbação na rede de interesse. Isso pode ser feito da seguinte maneira: mantendo-se a rede externa na forma não-reduzida, considerando-se valores aproximados para os dados das barras *PQ* e *PV* do sistema externo (no caso de se imaginar ignorância total sobre a rede externa faz-se $P = 0$ e $Q = 0$ nas barras *PQ*, e $P = 0$ e $V = 1$ nas barras *PV*); considerando-se conhecido o estado da rede interna e da fronteira, determinam-se as injeções equivalentes na fronteira, da mesma forma que foi descrito na Sec. 7.5 (primeiramente, determina-se o estado da rede externa considerando-se temporariamente as barras de fronteira como sendo do tipo $V\theta$ e, em seguida, calculam-se as injeções equivalentes por meio das expressões 7.11); as injeções assim calculadas impedem que os erros sobre o estado externo se propaguem para a rede de interesse, na qual, por suposto, o estado é correto no caso básico; e utilizando-se o equivalente não-reduzido pode-se estudar uma série de perturbações na rede de interesse e observar a influência que as aproximações introduzidas têm sobre as reações da rede externa. Testes exaustivos realizados com o modelo de fluxo de carga não-reduzido mostraram que, mesmo na situação de ignorância total sobre o estado da rede externa, os resultados obtidos no estudo de contingências são muito próximos dos obtidos utilizando-se a rede completa. Praticamente a mesma qualidade dos resultados foi observada quando foram eliminadas as barras *PQ* do sistema externo. Entretanto, geralmente a precisão dos resultados se deteriora de modo significativo se também forem eliminadas as barras *PV* externas, caso em que se obtém o equivalente Ward na versão não-linear. Resu-

mindo: o conhecimento sobre o estado correto da rede externa não é essencial na determinação do equivalente; além disso, a eliminação das barras *PQ* externas pode ser feita sem prejudicar a resposta do equivalente. Desta forma, as informações que importam na determinação do equivalente são a configuração da rede externa e a localização das barras *PV* (independentemente das magnitudes das tensões especificadas). Note-se, finalmente, que erros de configuração externa podem ser tolerados desde que os componentes correspondentes estejam eletricamente afastados da fronteira.

Problemas

7.1. Considerar o sistema de quatro barras e quatro linhas representado na Fig. 7.4, na qual a rede é modelada pelo fluxo de carga CC. Obter a rede equivalente considerando a rede externa formada pelas barras 1 e 3 (conseqüentemente, as barras 2 e 4 estarão na fronteira). Utilizar os três procedimentos seguintes:

a) Redução de circuitos por combinações série/paralelo e cálculo das injeções equivalentes, impondo-se que o estado das barras 2 e 4, que constituem a fronteira, permaneça inalterado, antes e depois da redução.
b) Aplicação direta das Eqs. (7.5) e (7.6).
c) Eliminação de Gauss [Eq. (7.9)].

7.2. Considerar o sistema de quatro barras e quatro linhas representado na Fig. 7.5. Considerar, também, que as barras 3 e 4 constituem a rede externa (a ser eliminada) e que, conseqüentemente, as barras 1 e 2 formem a fronteira.

a) Determinar o equivalente Ward.
b) Determinar o equivalente Ward estendido.

7.3. Utilizar as redes equivalentes determinadas no Prob. 7.2. para analisar as seguintes perturbações:

a) Acréscimos de 20 % na carga da barra 2, que passa a ser: $P_2 = -0{,}18$ e $Q_2 = -0{,}06$.
b) Duplicação da linha 1-2, isto é, os parâmetros do ramo 1-2 passam a ser: $r_{1.2} = 0{,}05$, $x_{1.2} = 0{,}25$ e $b^{sh}_{1.2} = 0{,}0$.

Estudar as mesmas perturbações utilizando a rede completa (Fig. 7.5) e comparar os resultados.

Apêndice A

ANÁLISE DE REDES EM CENTROS DE SUPERVISÃO E CONTROLE EM TEMPO REAL

Uma parte considerável dos métodos de análise de redes apresentados neste livro, além das aplicações usuais, pode ser utilizada também na operação de sistemas de energia elétrica por meio de centros de supervisão e controle em tempo real. Este apêndice faz uma apresentação sumária sobre as funções executadas por esses centros de controle, dando-se ênfase para as funções que utilizam métodos de análise de redes.

A.1. Introdução aos centros de controle [17]

Os elementos básicos de um centro de controle são o sistema de aquisição de dados e comunicações; os sistemas de computadores e programas; as interfaces homem-máquina; e os operadores. As funções desses centros de controle podem ser divididas em três grupos: controle da geração, controle supervisório e funções de segurança em tempo real. Os controles da geração e supervisório constituem as funções tradicionais dos centros de controle enquanto a operação em tempo real atualmente encontra-se em fase de desenvolvimento de implantação.

O **controle da geração** (*ver a próxima seção*) inclui a regulação da freqüência e dos intercâmbios, e a alocação da geração visando a minimizar o custo de operação levando-se em conta requisitos de operação e a confiabilidade da geração.

No **sistema supervisório** (Supervisory Control and Data Aquisition-SCADA), informações lógicas e analógicas sobre o estado atual do sistema, obtidas por meio de estações remotas, são transferidas ao centro de controle onde são processadas por computador e apresentadas ao operador. Os mesmos canais de transmissão podem ser utilizados então para comandar, por exemplo, chaveamentos de componentes do sistema.

A **operação em tempo real** constitui uma extensão do sistema SCADA e permite a execução de funções relacionadas com a segurança do sistema (estimação de estado, análise de contingências, monitoração de segurança, etc.).

A.1.1. *Controle da geração*

O controle da geração envolve as funções de controle automático da geração (intercâmbio e freqüência) e o despacho econômico (alocação ótima da geração entre as unidades geradoras disponíveis). Nos primeiros centros de controle, essas funções eram inteiramente executadas por computadores analógicos (controle contínuo), passando-se mais tarde à utilização de computadores digitais (controle discreto).

No **controle automático da geração** são previamente conhecidos os níveis globais de geração interna da área (despacho econômico) e os intercâmbios contratados, sendo a regulação da freqüência e do intercâmbio feitos pelo ajuste da geração de um grupo de unidades geradoras da área. O procedimento de controle geralmente adotado é o Tie-Line Bias Control (TLB), pelo qual cada área do sistema interligado utiliza um sinal de erro composto pela soma do desvio de intercâmbio (erro em relação ao valor desejado) mais o produto do desvio na freqüência pela constante de polarização (Bias), que converte o desvio na freqüência em um erro equivalente em potência. Neste esquema, todas as áreas participam da regulação da freqüência e cada uma delas controla o próprio intercâmbio.

O **despacho econômico** fornece os pontos básicos de operação e os fatores de distribuição utilizados pelo controle automático da geração. Os fatores de distribuição dão as proporções em que as variações na carga do sistema são assumidas pelas unidades geradoras sob controle. O programa de despacho econômico aloca a geração entre as unidades do sistema de tal forma que sejam obedecidos os requisitos de confiabilidade (reserva girante) e as restrições de operação do sistema (limites de operação).

A.1.2. *Controle supervisório e de segurança*

O **sistema supervisório** pode ser encarado como um primeiro passo no desenvolvimento do **sistema de monitoração** e **controle de segurança em tempo real** de sistemas de energia elétrica, sendo que ambos têm as seguintes características básicas:

a) Coleta de informações no sistema elétrico pelas estações remotas distribuídas pelo sistema e transferência dessas informações aos centros de controle. Há uma tendência no sentido de se utilizarem terminais inteligentes (microcomputadores) que permitem um pré-processamento das informações antes da transmissão ao centro de controle.

b) Processamento das informações pelos computadores do centro de controle e apresentação ao operador por meio de dispositivos de interação homem-máquina (*displays*, por exemplo).

c) Atuação do operador sobre componentes do sistema (disjuntores, por exemplo) por meio dos mesmos canais pelos quais recebeu as informações sobre o estado do sistema.

Como a malha de controle se fecha pelo operador, não é apropriado caracterizar esses tipos de controles como automáticos. No entanto, em estágios futuros de desenvolvimento das funções de monitoração e controle de segurança, algumas das operações efetuadas via operador poderão ser automatizadas, significando que a análise e os comandos resultantes serão realizados pelo computador sem interferência direta do operador.

Uma diferença fundamental entre o sistema SCADA e o controle em tempo real, incluindo funções orientadas para a segurança, está no nível do processamento que as informações sofrem antes de ser apresentadas ao operador. No sistema supervisório, as medidas analógicas e de *status* de disjuntores/chaves são apresentadas ao operador praticamente na forma em que foram recebidas, a menos de alguns testes de consistência das medidas. Pelo contrário, a execução de funções avançadas de segurança passa inicialmente pela modelagem da rede supervisionada em seu estado atual, o que envolve o configurador e o estimador de estado. A partir das informações recebidas sobre o *status* de disjuntores/chaves, o configurador determina a topologia atual da rede. Utilizando-se da topologia da rede, dos parâmetros do sistema armazenados no banco de dados e das telemedidas de grandezas analógicas, o estimador de estado fornece o estado (magnitudes e ângulos das tensões) das barras que constituem o sistema supervisionado. A partir da modelagem da rede supervisionada (sistema interno), pode-se obter um modelo do sistema elétrico incluindo áreas não supervisionadas (sistema externo) pela utilização de representações aproximadas (circuitos equivalentes). Tendo-se a representação do sistema elétrico, podem-se efetuar estudos envolvendo as funções relacionadas com a segurança (fluxo de potência, análise de contigências, monitoração de segurança, controle preventivo/corretivo, etc.).

A.2. Operação em tempo real

Nesta seção são apresentados os vários estados de operação do sistema e discutidas as principais ações de controle em tempo real.

A.2.1. Restrições de carga, de operação e de segurança

Um sistema de energia elétrica, operando em regime estacionário, está sujeito a dois tipos de restrições:

$$\begin{aligned} &\text{de carga} && \underline{g}(\underline{x}) = 0 \\ &\text{de operação} && \underline{h}(\underline{x}) \leqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.1)}$$

em que $\underline{g}$ e $\underline{h}$ são funções vetoriais das variáveis de estado $\underline{x}$.

As restrições de carga (equações do fluxo de carga) representam as injeções de potência ativa e reativa especificadas nas barras de carga, bem como as injeções de potência ativa nas barras de geração. Entre as restrições de operação estão os limites impostos às magnitudes das tensões nodais, aos fluxos de potência aparente nas linhas de transmissão e transformadores, e às injeções de potência reativa nas barras de geração.

Ao conjunto de restrições (A.1) podem-se acrescentar as chamadas restrições de segurança, cuja definição está associada a um conjunto preestabelecido de contingências possíveis (as mais plausíveis) de linhas, transformadores, geradores e capacitores/reatores *shunt*. O novo conjunto de restrições passa a ser:

$$\begin{aligned} &\text{restrições de carga} && \underline{g}(\underline{x}) = 0 \\ &\text{restrições de operação} && \underline{h}(\underline{x}) \leqslant 0 \\ &\text{restrições de segurança} && \underline{s}(\underline{x}) \leqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.2)}$$

em que $\underline{s}$ é uma função vetorial que consiste em todas as restrições de carga e de operação para cada uma das contingências listadas.

Os limites de operação do sistema e de equipamentos, referidos anteriormente, em muitos casos não são rígidos, no sentido de que podem ser violados por algum tempo. Em situações de emergência, eles são, em geral, mais abertos. Assim, a capacidade térmica de uma linha de transmissão ou o carregamento máximo de um transformador é diferente quando se consideram as sobrecargas possíveis para, por exemplo, 3 minutos ou 1 hora.

É praticamente inviável que a lista de contingências, na qual se baseiam as restrições de segurança, inclua todas as contingências possíveis. Esta lista geralmente inclui as contingências simples e um número limitado de contingências múltiplas. Não existem critérios bem estabelecidos para a elaboração dessas listas, podendo-se levar em conta, por exemplo, a experiência prévia com o sistema e as probabilidades de ocorrência de falhas.

A.2.2. Estados de operação do sistema

Baseando-se nas definições das restrições de carga, de operação e de segurança, apresentadas anteriormente, podem ser definidos quatro estados de operação do sistema: seguro, alerta, emergência e restaurativo.

Seguro

Neste estado, também chamado de normal-seguro, são obedecidos os três conjuntos de restrições (A.2): carga, operação e segurança. Isto significa que o sistema está intato, com suprimento total da demanda e nenhuma violação de limites de operação. A observância das restrições de segurança quer dizer que nenhuma das contingências listadas como possíveis, se de fato ocorrer, levará o sistema ao estado de emergência. A ocorrência, no entanto, de uma contingência considerada impossível (não listada) poderá provocar uma emergência.

Alerta

No estado alerta, ou normal-alerta, são obedecidas apenas as restrições de carga e operação (A.1): nem todas as restrições de segurança são obedecidas, entretanto. Da mesma forma que no estado seguro, o sistema está intato com atendimento de todas as cargas e sem nenhuma violação de limites de operação. A não-observância das restrições de segurança significa que a ocorrência de pelo menos uma das contingências listadas como possíveis poderá levar o sistema a uma situação de emergência.

Emergência

O que caracteriza o estado de emergência é a violação das restrições de operação. A emergência pode ser provocada por uma contingência e conseqüente desligamento de um ou mais componentes do sistema (linhas, geradores, transformadores, etc.). Com exceção dos equipamentos que provocaram a emergência, o sistema está intato. A eliminação da emergência pode ser feita com a passagem do sistema para o estado alerta ou, então, pelo desligamento de partes do sistema (cargas, por exemplo), o que leva o sistema para o estado restaurativo.

Restaurativo

Este estado é atingido quando uma emergência é eliminada por desligamento manual ou automático de partes do sistema, efetuado pelo centro de controle ou por dispositivos locais. As restrições operacionais são obedecidas, mas o sistema não está intato (cargas não-atendidas, ilhamentos, etc.). Na opção de se passar do estado de emergência para o estado restaurativo, sacrifica-se a integridade do sistema (inclusive com o desligamento de cargas) em benefício da observância das restrições de operação.

A.2.3. Transições entre os estados do sistema

As transições entre os quatro estados definidos anteriormente podem ocorrer tanto em conseqüência de perturbações no sistema (transições ditas involuntárias) como devido a ações de controle (transições voluntárias), algumas das quais constituem funções específicas dos centros de monitoração e controle. No estágio atual de desenvolvimento, essas ações de controle são comandadas pelo operador que pode dispor de programas computacionais (tipo fluxo de carga ótimo) na determinação das melhores estratégias de controle a serem seguidas em cada situação particular (uma emergência, por exemplo). O operador pode também utilizar-se de um programa de fluxo de carga (fluxo de carga do operador) pelo qual tem a possibilidade de testar o efeito de estratégias alternativas de controle sobre o estado atual do sistema. As várias transições de estado descritas a seguir estão ilustradas na Fig. A.1.

Seguro → alerta

Uma contingência, ou mesmo a evolução normal da demanda, pode levar o sistema do estado seguro para o estado alerta, no qual uma ou mais das restrições de segurança deixam de ser obedecidas.

Alerta → seguro

Esta transição é feita pela execução da função **controle de segurança** (*modo corretivo*) e realizada pelo centro de controle. Consiste em determinar-se uma solução viável para o conjunto de restrições (A.2) a partir de uma situação na qual apenas as restrições (A.1) são obedecidas. A determinação da estratégia de controle de segurança pode ser feita por meio de um programa do tipo fluxo de carga ótimo com restrições de segurança, pelo qual se procura determinar uma solução viável que minimize, por exemplo, o deslocamento do ponto de operação, a alteração nas variáveis de controle ou o custo de operação.

Seguro → seguro

A partir de um programa de previsão de demanda a curto prazo, o estado do sistema pode ser extrapolado para um ponto de operação futuro (1 hora, por exemplo). Mesmo que o estado atual do sistema seja normal-seguro, para as condições previstas, o sistema poderá estar no estado alerta (ou até mesmo no estado de emergência, o que é menos provável). Neste caso, pode ser acionada a função controle de segurança (*modo preventivo*), que tentará colocar o sistema no estado seguro também para as condições previstas

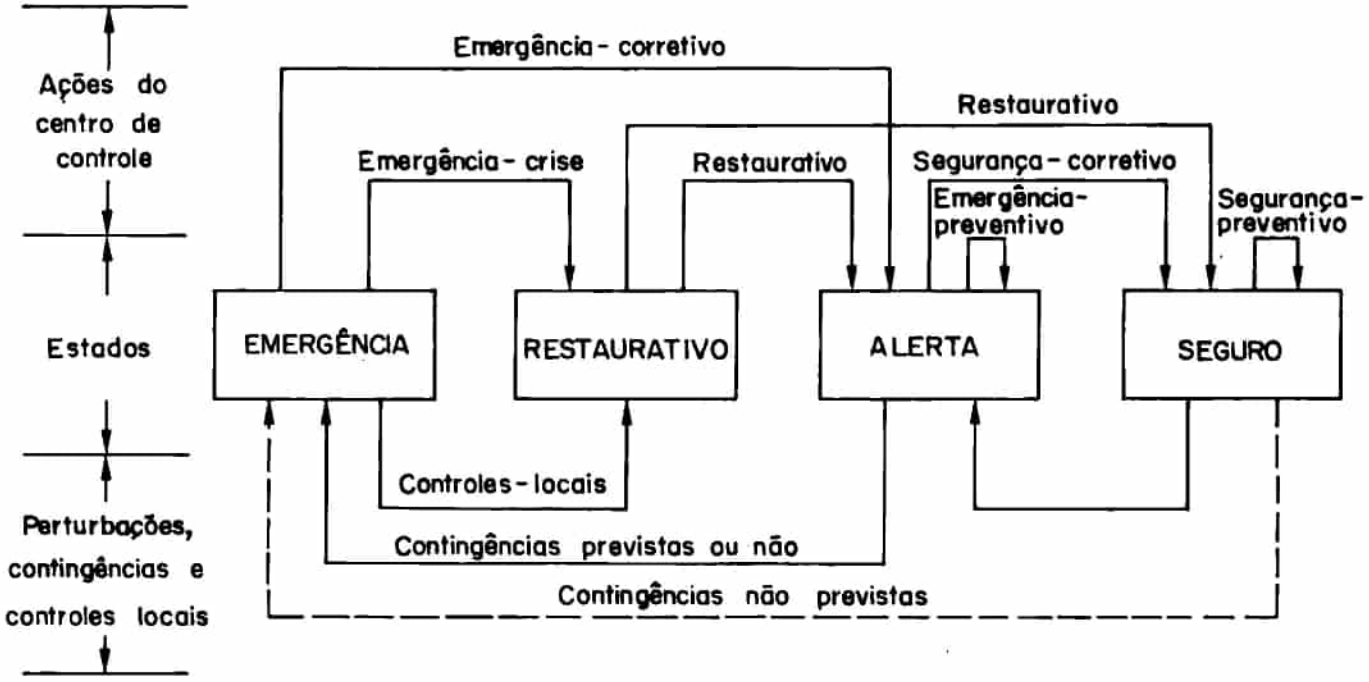


Figura A.1 – Estados de operação

Alerta → emergência

Se o sistema estiver no estado de alerta e ocorrer uma das contingências responsáveis por este estado, então o sistema passará para o estado de emergência. Dito de outra forma, o sistema estará em alerta quando para uma ou mais das contingências consideradas possíveis (previamente listadas) são previstas violações de limites. O estado de emergência é atingido quando uma dessas contingências, de fato, ocorre antes de se adotarem medidas de controle para colocar o sistema no estado seguro (transição alerta → seguro).

Emergência → alerta

O sistema pode sair do estado de emergência pela atuação do **controle de emergência**, nos modos corretivo ou de crise. A transição emergência → alerta é realizada pelo modo corretivo. Neste caso, uma violação de limite pode ser eliminada por ações de controle, envolvendo, por exemplo, remanejamento da geração, variação de tensões controladas ou de *taps* de transformadores, chaveamento de bancos de capacitores/indutores, etc. Neste modo de atuação do controle de emergência, ao contrário do que ocorre no *modo de crise*, não é sacrificado o atendimento da demanda ou a integridade do sistema. Matematicamente, essa transição corresponde à determinação de uma solução viável para o conjunto de restrições (A.1), minimizando-se, por exemplo, o desvio nas variáveis de controle. As políticas de controle de emergência (*modo corretivo*) podem ser preestabelecidas, determinadas com a ajuda de programas computacionais durante a emergência ou confiadas ao operador (nos casos mais simples).

Emergência → restaurativo

Nem sempre é possível a transição do estado de emergência para o estado de alerta. Em algumas situações, dispositivos locais de controle e proteção atuam antes que qualquer medida seja tomada pelo centro de controle, colocando o sistema no estado restaurativo pelos desligamentos de cargas/circuitos. Em outros casos, os desligamentos de cargas/circuitos são efetuados pelo próprio centro de controle por meio da função **controle de emergência** no *modo de crise*. Esta opção pode ser tomada quando não for possível fazer os limites de operação serem obedecidos por meios mais brandos, como, por exemplo, remanejamento da geração ou controle de tensão.

Alerta → alerta

Se o estado presente do sistema for de alerta, e prevendo-se para um estado futuro (extrapolado para, por exemplo, 1 hora adiante) uma situação de emergência, o operador poderá lançar mão da função controle de emergência atuando no *modo preventivo*, visando a mudar o ponto de operação atual do sistema de tal forma que, para o estado previsto, não se verifique mais a emergência detectada anteriormente.

Restaurativo → alerta

A função do **controle restaurativo** é religar as cargas e os circuitos do sistema, desligados durante uma emergência, tentando colocar o sistema de volta ao estado seguro ou, pelo menos, no estado alerta.

A.3. Sistema de análise de redes

Um sistema de supervisão e controle em tempo real é constituido de vários sistemas parciais, entre os quais está o sistema de análise de redes, que é responsável pela execução de funções como o configurador, o estimador de estado, fluxo de carga, análise de segurança, de despacho corretivo, etc. Nesta seção, serão apresentados os vários módulos (funções) que compõem o sistema de análise de redes, procurando-se esclarecer seu encadeamento na operação em tempo real, bem como suas interfaces.

Para efeitos de análise, conforme está apresentado no Cap. 7, a rede elétrica pode ser decomposta em sistema interno, fronteira e sistema externo (Fig. 7.1). O sistema interno corresponde à parte supervisionada da rede (a rigor, as linhas de intercâmbio e as barras de fronteira podem ser supervisionadas e então deverão ser consideradas como fazendo parte do sistema interno).

A.3.1. Configurador

O objetivo do configurador é determinar a topologia atual da rede interna (supervisionada) em tempo real para posterior utilização pelas demais funções do sistema de análise de redes (estimador de estado, fluxo de carga em tempo real, etc.). Para tanto, o configurador se utiliza de informações sobre o *status* atual das chaves e disjuntores que conectam os vários componentes da rede elétrica supervisionada.

O estimador de estado trabalha só com o sistema interno (podendo incluir, eventualmente, a fronteira), mas o fluxo de carga em tempo real, da mesma forma que a análise de segurança pode exigir a modelagem de outras partes do sistema interligado. A configuração dessas partes do sistema externo pode também ser manipulada pelo configurador, com a diferença de que, neste caso, não se trabalha com informações em tempo real, pois se trata de uma parte não-supervisionada da rede.

A.3.2. Estimador de estado

O objetivo do estimador de estado é determinar o estado (magnitudes de tensões e ângulos) do sistema interno, podendo incluir a fronteira. Isto só é possível se, além da configuração, existirem medidas analógicas de grandezas do sistema interno em número suficiente para permitir a execução do estimador de estado. Neste caso, diz-se que o sistema interno é observável. Problemas com o sistema de telemedição podem reduzir o número de medidas disponíveis para o estimador de estado, fazendo com que o sistema interno seja apenas parcialmente observável. Essa falta de medidas poderá ser suprida, em algumas situações, por pseudomedidas obtidas via um programa de previsão de carga. Uma outra alternativa para essas situações consiste em redefinir-se o sistema interno para fazê-lo coincidir com o sistema observável.

As equações básicas que representam os componentes do sistema elétrico são as mesmas no estimador de estado e no problema do fluxo de carga. A diferença fundamental entre os dois problemas é que o estimador de estado manipula dados redundantes e sujeitos a erros. Além de calcular o estado da rede observável, por um processo de filtragem, o estimador é capaz de processar medidas com erros grosseiros: detectando sua presença, identificando-as e eliminando seu efeito no processo de estimação. Uma outra característica importante do estimador de estado é que ele pode fornecer o estado de barras não-supervisionadas, desde que haja informação redundante em número suficiente nas barras adjacentes.

A.3.3. Previsão de carga por barra

A previsão de carga por barra do sistema em geral se baseia na previsão de demanda do sistema como um todo (curvas semanais de consumo médio horário). A demanda global do sistema pode ser transformada em demanda por barra utilizando-se fatores de distribuição previamente calculados, tanto para barras do sistema observável (interno) como para barras do sistema externo. Para a parte observável, pode-se utilizar um método de atualização dos fatores de distribuição, baseando-se na dis-

tribuição efetiva de carga verificada pelos resultados fornecidos pelo estimador de estado.

Os resultados fornecidos pelo programa de previsão de carga têm aplicações no estimador de estado, no fluxo de carga em tempo real, no fluxo de carga ótimo, etc. No estimador de estado, os resultados extrapolados para cargas de barras podem ser utilizados para completar o conjunto de medidas disponíveis visando a garantir a observabilidade da rede supervisionada. O fluxo de carga com dados em tempo real já supõe seja conhecido o estado fornecido pelo estimador, mas podem ser necessárias as cargas de barras do sistema externo para ser possível a execução dêsse programa (além dos dados de geração), o que pode ser conseguido via previsão de carga. O programa de fluxo de carga ótimo, ou mesmo um programa de fluxo de carga de operação, pode trabalhar com condições futuras do sistema, daí a necessidade de se dispor de cargas previstas.

A função de previsão de carga não fornece diretamente as cargas das barras mas tão-só os fatores de distribuição que em cada aplicação específica podem ser convertidos em cargas pelo conhecimento da previsão de carga do sistema.

A.3.4. *Modelagem da rede em tempo real (fluxo de carga)*

O estimador de estado resolve o problema do fluxo de carga para uma parte da rede interligada (sistema observável). A modelagem da rede em tempo real visa a determinar as condições atuais da rede, incluindo também uma representação do sistema externo. A modelagem do sistema externo é feita sem se dispor de dados em tempo real, daí a necessidade de, por exemplo, utilizar-se a previsão de carga para as barras externas. Parte do sistema externo pode também ser substituída por um equivalente reduzido.

A modelagem da rede em tempo real é obtida por um programa de fluxo de carga no qual se consideram todas as barras observáveis como sendo barras de referência (V e θ especificados), enquanto as barras da rede externa podem ser dos tipos PV ou PQ. Dessa forma, o estado da rede observável não é deteriorado pela representação aproximada da rede externa. A modelagem da rede obtida por meio do programa de fluxo de carga em tempo real pode ser utilizada, por exemplo, como o caso básico a partir do qual a análise de contingência é executada.

A.3.5. *Análise de segurança*

A análise de segurança consiste na simulação de um conjunto de contingências consideradas mais prováveis e da conseqüente verificação

dos limites de operação do sistema. A lista de contingências inclui a retirada de linhas, transformadores e geradores, podendo conter ocorrências simples ou múltiplas. Esta função pode ser executada para as condições atuais (dados em tempo real) ou previstas; automaticamente ou por solicitação do operador. O resultado da análise de segurança é que diz se o sistema está em estado seguro ou não (alerta).

A.3.6. Fluxo de carga de operação

Freqüentemente, na operação de um centro de controle, o operador tem necessidade de simular o efeito de ações de controle antes de efetuá-las no sistema elétrico. Em outras situações, pode ser necessária a determinação de estratégias de controle corretivo para retirar o sistema de uma situação indesejável. Estas funções podem ser realizadas pelo fluxo de carga de operação, cuja execução é acionada pelo operador. Algumas das situações podem ser resolvidas por um programa convencional de cálculo de fluxo de carga e outras, como a determinação de estratégias de controle, exigem um programa de fluxo de carga ótimo. Esta função trabalha com dados previstos e portanto lança mão da previsão de carga.

A.3.7. Análise de sensibilidade de tensão

Esta função pode fornecer dois tipos de informações ao operador: quais as ações de controle que têm maior efeito sobre a magnitude da tensão de uma determinada barra; e quais as magnitudes de tensão que são mais afetadas por uma determinada ação de controle. Entre as ações de controle que podem ser comandadas pelo operador estão as magnitudes das tensões das barras de geração, a posição de *taps* de transformadores, o chaveamento de bancos de reatores/capacitores, etc.

A.3.8. Controle corretivo de emergência

Esta função é constituída basicamente de um programa de fluxo de carga ótimo e pode ser usada pelo operador para determinar ações de controle corretivo que permitam ao sistema elétrico sair de uma situação em que os limites de operação estão sendo violados (emergência). De forma diferente do fluxo de carga de operação, o fluxo de carga ótimo utilizado no controle corretivo de emergência trabalha com dados em tempo real. A função objetivo não precisa ser necessariamente econômica, podendo representar, por exemplo, o mínimo desvio em relação ao ponto de operação atual do sistema (este, sim, determinado por critérios econômicos).

Apêndice B

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

O estudo da sensibilidade [18] das variáveis de um sistema de energia elétrica em relação a um certo conjunto de ações de controle tem encontrado aplicação em vários problemas de análise de redes, inclusive na determinação de ações de controle corretivo a serem comandadas por um operador em um centro de monitoração e controle do sistema.

Conforme se apresentou no Cap. 5, as equações básicas do fluxo de carga (duas equações por barra) podem ser agrupadas nos subsistemas 1 e 2. O Subsistema 1, cujas equações são

$$P_k^{esp} - V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \operatorname{sen} \theta_{km}) = 0 \qquad \text{(B.1)}$$

para barras PQ e PV

$$Q_k^{esp} - V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \operatorname{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) = 0 \qquad \text{(B.2)}$$

para barras PQ

em que $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$. As incógnitas do Subsistema 1 podem ser agrupadas no vetor $\underline{x}$, dado por:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{\theta} \\ \underline{V} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \; NPV + NPQ \\ \} \; NPQ \end{matrix} \qquad \text{(B.3)}$$

Esse vetor também é chamado de vetor das variáveis dependentes.

Seja $\underline{y}$ o vetor das grandezas especificadas. As componentes de $\underline{y}$ aparecem tanto no Subsistema 1 como no Subsistema 2 e podem ser agrupadas no vetor $\underline{u}$ das variáveis de controle e no vetor $\underline{p}$ dos parâmetros do sistema. O vetor das variáveis de controle $\underline{u}$ pode conter, entre outras, as magnitudes das tensões nodais nas barras de geração e compensadores síncronos, as injeções de potência ativa nas barras de geração e os *taps* variáveis de transformadores. O vetor de parâmetros $\underline{p}$ contém, por exemplo, as injeções de potência ativa e reativa nas barras de carga. Deve-se lembrar, ainda, que o estado da rede fica inteiramente definido pelos ângulos e pelas magnitudes das tensões nodais de todas as barras da rede, ou seja, o vetor de estado é formado por todas as componentes

de $\underline{x}$, por algumas componentes de $\underline{y}$ (magnitudes das tensões das barras PV, por exemplo) e pela referência angular.

As Eqs. (B.1) e (B.2), que constituem o Subsistema 1, podem ser postas na seguinte forma compacta:

$$\underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p}) = 0 \tag{B.4}$$

A perturbação no vetor das variáveis dependentes $\underline{x}$ produzida por alterações introduzidas nas variáveis de controle $\underline{u}$ e nos parâmetros $\underline{p}$ pode ser obtida pela relação:

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u} + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}} \Delta \underline{p} = 0 \tag{B.5}$$

ou seja:

$$\Delta \underline{x} = -\left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right]^{-1} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u} - \left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right]^{-1} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}} \Delta \underline{p} \tag{B.6}$$

Chamando-se:

$$S_u = -\left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right]^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}} \quad \text{e} \quad S_p = -\left[\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}}\right]^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{p}} \tag{B.7}$$

pode-se reescrever a expressão (B.6) como se segue

$$\Delta \underline{x} = S_u \Delta \underline{u} + S_p \Delta \underline{p} \tag{B.8}$$

Deve-se notar que as matrizes S_u e S_p são cheias, ao contrário do que ocorre com a matriz jacobiana $\partial \underline{g}/\partial \underline{x}$. Uma maneira de se montar S_u e S_p (total ou parcialmente) é pela utilização dos fatores triangulares de $\partial \underline{g}/\partial \underline{x}$, disponíveis a partir de uma solução convergida pelo método de Newton. Para tanto, resolvem-se repetidamente os sistemas lineares formados pela matriz jacobiana e pelas colunas das matrizes $\partial \underline{g}/\partial \underline{u}$ e $\partial \underline{g}/\partial \underline{p}$.

Além das variáveis já mencionadas, existem as chamadas variáveis dependentes funcionais $\underline{w}$, entre as quais estão: fluxos de potência ativa e reativa, correntes, injeções de potência reativa em barras de geração, etc. Essas variáveis podem ser postas na forma:

$$\underline{w} = \underline{h}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p}) \tag{B.9}$$

As perturbações $\Delta \underline{w}$ provocadas por $\Delta \underline{u}$ e $\Delta \underline{p}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{w} &= \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} + \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u} + \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{p}} \Delta \underline{p} \\ &= \left[\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} S_u\right] \Delta \underline{y} + \left[\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{p}} + \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} S_p\right] \Delta \underline{p}. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Deve-se notar finalmente que as componentes do vetor $\underline{x}$, apesar de serem variáveis dependentes, não são do tipo funcional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Elgerd, O. I. – *Electric Energy Systems Theory: An Introduction*, McGraw-Hill, New York, 1971.

[2] Parker, B. J., Tanabe, A. e Schilling, M. T. – Precisão do modelo linearizado de fluxo de potência para simulação do sistema elétrico brasileiro, Nota Técnica, GPD, ELETROBRÁS, Rio de Janeiro, 1980.

[3] Tinney, W. F. e Walker, J. W. – "Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization", *Proceedings of IEEE* **55**, 1801-1809, New York, 1967.

[4] Tinney, W. F., "Compensation Methods for Network Solutions by Optimally Ordered Triangular Factorizations", *IEEE Trans. Power App. Syst.* **PAS-91**, 123-127, New York, 1972.

[5] Alsaç, O., Stott. B. e Tinney W. F. – "Sparsity-Oriented Compensation Methods for Modified Network Solutions", IEEE-PES Summer Meeting, San Francisco, 1982.

[6] Van Ess, J. E. e Griffin, J. H. – "Elimination Methods for Load Flow Studies", *AIEE Transactions* **PAS-80**, 299-304, New York, 1961.

[7] Tinney, W. F. e Hart, C. E. – "Power Flow Solution by Newton's Method", *IEEE Trans. Power App. Syst.* **PAS-86**, 1449-1456, New York, 1967.

[8] Stott, B. – "Decoupled Newton Load Flow, *IEEE Trans. Power App. Syst.* **PAS-91**, 1955-1959, New York, 1972.

[9] Stott, B. e Alsaç, O. – "Fast Decoupled Load Flow", *IEEE Trans. Power App. Syst.* **PAS-93**, 859-869, New York, 1974.

[10] Stott, B. – "Review of Load Flow Calculation Methods", *Proceedings of IEEE* **62**, 916-929, New York, 1974.

[11] Tinney W. F. e Powell, W. L. – "Notes on Newton-Raphson Method for Solution of AC Power Flow Problem", IEEE Short Course, Power Systems Planning, New York, 1971.

[12] CEPEL – Curso SINSC, Parte Prática, vol. III, Rio de Janeiro, 1981.

[13] Ward, J. B. – "Equivalent Circuits for Power Flow Studies", *AIEE Transactions* **68**, 373-382, New York, 1949.

[14] Monticelli, A., Deckmann, S., Garcia, A. e Stott, B. – "Real-Time External Equivalents for Static Security Analysis", *IEEE Trans. Power App. Syst.* **PAS-98**, 498-508, New York, 1979.

[15] Deckmann, S., Pizzolante, A., Monticelli, A., Stott, B. e Alsaç, O. – "Studies on Power System Load Flow Equivalents", *IEEE Trans. Power App. Syst.* **PAS-99**, 2301-2310, New York, 1980.

[16] Deckmann, S., Pizzolante, A., Monticelli, A., Stott, B. e Alsaç, O. – "Numerical Testing of Power System Load Flow Equivalents", *IEEE Trans. Power App. Syst.* **PAS-99**, 2292-2300, New York, 1980.

[17] "Energy Control Center Design", IEEE Tutorial Couse Text, IEEE-PES Summer Meeting, 1977.

[18] Peschon, J., Piercy, D. S., Tinney, W. F. e Tveit, O. J. – "Sensitivity in Power Systems", *IEEE Trans. Power App. Syst.* **PAS-87**, 1687-1696, New York, 1968.

impresso na
planimpress gráfica e editora
rua anhala, 247 - s.p.